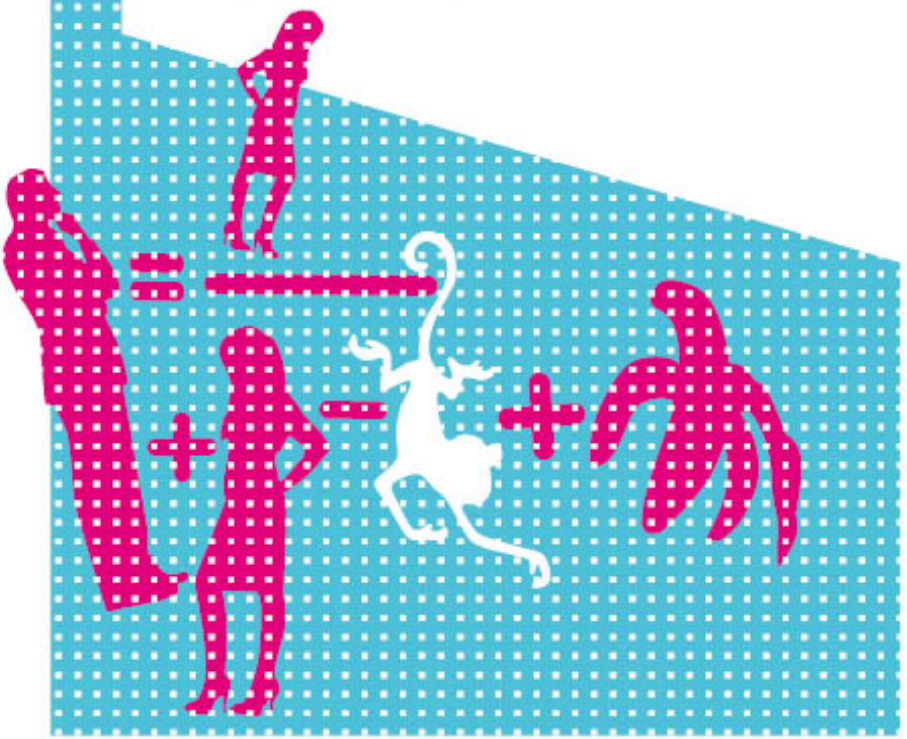
TEMA

adrian paenza

matematiko, jsi to ty?

ČÍSLA, OSOBNOSTI, PROBLÉMY A ZVLÁŠTNOSTI




TEMA

Adrián Paenza Matematiko, jsi to ty?

adrián paenza

matematiko, jsi to ty?

ČÍSLA, OSOBNOSTI, PROBLÉMY A ZVLÁŠTNOSTI

KNIHA ZLIN

Matemática... ¿Estás ahí? fue publicado originalmente en español en 2005. Esta traducción por acuerdo con Siglo XXI Editores Argentina.

Kniha *Matematiko, jsi to ty?* byla poprvé publikována roku 2005 ve španělštině. Tento překlad je vydáván ve spolupráci s nakladatelstvím Siglo XXI Editores Argentina.

Copyright © Adrián Paenza, 2005
Translation © Denisa Kantnerová, 2010
Cover and layout © Lucie Mrázová, 2010

ISBN 978-80-87497-18-0

O knize

Dobré knihy nám vydrží jeden den. Lepší vydrží jeden rok. A velmi dobré knihy vydrží mnoho let. Ale také existují knihy, které nás provázejí po celý život – a ty jsou nepostradatelné. Tato kniha se řadí mezi ty, jež trvají po celý život – taková truhla s pokladem, která nás po otevření zavalí otázkami a záhadami, čísly tak velkými, že jsou až nekonečná (různě nekonečná), osobnostmi, s nimiž by se člověk chtěl setkat a popovídat si s nimi jako s přáteli.

Adrián Paenza si nejen pokládá otázku, proč má matematika tak špatnou pověst – jeho hlavní starostí je nám přiblížit pátrání po vzorcích a pravidelnostech a daří se mu nás nakazit svým nezdolným nadšením pro věc. Paenza je zvědavý jako málokdo a zahaluje nás universem, v němž kraluje věda, ale zároveň nezapomíná na přátele, záhady, vzdělání a příhody ze života zasvěceného počtům a výuce.

Některé povídky jsou součástí příhod, jež autor předkládá v televizním cyklu *Vědci v argentinském průmyslu,* což je možná část, na niž veřejnost, která se týden co týden snaží řešit úlohy s klobouky, ruletami nebo narozeninami, čeká nejvíce. Ale všechny příhody dohromady vytvářejí obšírné a štědré universum, universum Adriána Paenzy, které díky této knize může pojmout další nadšence.

Kniha nás provází novými končinami pomocí mnoha rozličně obtížných příkladů. A tak se objevují zajímavosti, jež se dají číst lépe a pohodlněji, a zároveň kapitoly vyzývající čtenáře k odvážným úvahám a důkazům, jaké se někdy vyžadují přímo po studentech vědních oborů (některé kapitoly zahrnují témata z předmětů, jež sám Paenza

přednáší na Fakultě exaktních a přírodních věd na Universidad de Buenos Aires. A tak zatímco budeme žasnout nad Paenzovým dobrodružstvím v zemi matematiky, budeme si zároveň jako čtenáři moci hrát na studenty věd před tabulí s algebrou nebo matematickou analýzou.

Matematiko, jsi to ty? Možná si „takové otázky pokládáte", ale jisté je, že matematika je skutečně za každým rohem a ve všedním životě čeká na to, až ji objevíme. K tomu nyní máme výborného průvodce, který nás k pátrání přiměje.

Tuto knížku o šíření vědy napsali vědci, kteří se domnívají, že je načase vystrčit hlavu z laboratoře a vyprávět o krásách, velikosti a nezdarech této profese. A přesně o to jde – vyprávět, podělit se o znalosti, jež by nakonec mohly přijít vniveč, kdyby zůstaly skryty.

Diego Golombek

Tuto knihu věnuji svým rodičům Ernestovi a Frumě,
kterým vděčím za vše.
Své sestře Lauře.
Neteřím a synovcům Loreně, Alejandrovi, Máximovi, Paule, Ignaciovi, Brendě, Miguelitovi, Sabině, Vivianě, Soledad, Maríovi Josému, Valentínovi, Gabrielovi, Maxovi, Jasonovi, Whitney, Amandě, Jonathanovi, Meagan a Chadovi.
Carlosu Griguolovi.
Památce tety Eleny, Miriam a Delie a také památce Guida Peskina, Leóna Najnudela, Mannyho Kreitera a Noemí Cuñové.

Poděkování

Diegu Golombekovi – bez něho by tato kniha nevznikla.
Claudiu Martínezovi – jako první na mě naléhal, abych příběhy z knihy vyprávěl v televizi, a povzbudil mě k tomu, abych to skutečně udělal.
Svým studentům – právě oni mě naučili vyučovat a já jsem díky nim pochopil, co to znamená učit se. Děkuji svým přátelům, prostě proto, že jsou mými přáteli a mají mě rádi, což je pro mě nejpodstatnější.
Carmen Sessové, Alicii Dickensteinové, Miguelu Herrerovi, Baldomeru Rubiovi Segoviovi, Eduardu Dubucovi, Carlosu D´Andreovi, Cristianu Czubarovi, Enzu Gentileovi, Ángelu Larotondovi a Luisi Santalóovi.
Všem, kdo si přečetli rukopis (vlastně ne tak úplně rukopis), pustili se do něj a tak se ho pokusili záchránit, jen nevím, zda se jim to podařilo – dík si zaslouží Gerardo Garbulsky, Alicia Dickensteinová a Carlos D´Andrea.
Dále Marcelo Bielsa, Alberto Kornblihtt, Víctor Hugo Morales a Horacio Verbitsky za svůj etický postoj k životu.
Díky nim je ze mě lepší člověk.

Velcí lidé hovoří o *myšlenkách,*
průměrní lidé hovoří o *věcech,*
malí lidé hovoří o… *ostatních lidech.*[*]

* Tuto větu jsem před lety zahlédl ve Spojených státech na zadním nárazníku jednoho z aut: „Great people talk about ideas, average people talk about things, small people talk… about other people."

Ruka princezny

Pokaždé když mám promluvit o matematice k nematematicky založenému publiku, zvažuji, jak začít. Pořád stejně. Požádám o svolení a přečtu text od Pabla Amstera, vynikajícího matematika, hudebníka, odborníka na kabalu, který je navíc výjimečný člověk.

Pablo tento příběh použil při matematickém semináři pořádaném pro skupinu studentů výtvarného umění v Buenos Aires. Jedná se o úžasný text, o nějž se chci s vámi podělit (s Pablovým souhlasem).

Tady je. Jmenuje se „Ruka princezny".

Několik dílů jednoho známého českého animovaného seriálu vypráví o princezně, o jejíž ruku se uchází mnoho nápadníků.

Ti mají za úkol princeznu přesvědčit o svých kvalitách – v několika epizodách jsou znázorněné nejrůznější vynalézavé pokusy o svádění, které každý nápadník podnikne.

Nápadníci s rozličnými jednoduchými nebo naopak ohromujícími pomůckami jeden po druhém předstupují před princeznu, ale žádný ji ani trochu nezaujme.

Vzpomínám si například na jednoho, který jí předváděl déšť ze světel a hvězd; další se zase velkolepě vznášel a v prostoru prováděl různé pohyby. Nic. Na konci každé epizody se princezně zračí ve tváři naprosto netečný výraz.

Teprve poslední, závěrečný díl seriálu poskytne nečekaný konec – v porovnání se zázraky, které princezně nabízeli jeho předchůdci, vytáhne po-

slední nápadník z pláště brýle a podá je princezně, aby si je vyzkoušela. Princezna si je nasadí, usměje se a podá mu ruku.

* * *

Co se možných výkladů týče, je to příběh velmi přitažlivý a každá epizoda je sama o sobě velice krásná. Avšak teprve výsledné rozuzlení s sebou přináší pocit, že vše dopadne, jak má.

Příběh vskutku zajímavě pracuje s napětím, které nás v jistém okamžiku dovede k domněnce, že princezna se nespokojí s ničím.

Po jednotlivých epizodách, kdy nás už techniky nápadníků vyčerpávají, se na stále nespokojenou princeznu naštveme. Co čeká, že jí někdo předvede? A vtom se náhle objeví neznámý fakt – princeznu žádný z předváděných divů nenadchl proto, že je neviděla.

Takže potíž byla v tomhle. Samozřejmě. Kdyby se v pohádce tato skutečnost naznačila dříve, její konec by nás nepřekvapil. Mohli bychom sice pořád obdivovat nádheru výjevů, ale dotyčné jinochy s různými dobyvatelskými pokusy bychom považovali za hloupé, jelikož my *bychom věděli, že princezna je krátkozraká.*

Jenže když o tom nevíme, domníváme se, že za to můžou nápadníci, protože jak se zdá, nabízejí princezně příliš málo. Poslední nápadník ale už ví, že ostatní selhali, a tak se na celou situaci podívá z jiného úhlu. Podívá se na problém jinak.

Takže pokud ještě nevíte (Pablo se zde obrací na své posluchače, studenty výtvarného umění), *o čem bude tento seminář, možná budete překvapeni stejně jako v případě vyústění předešlého příběhu – budeme hovořit (a vlastně již hovoříme) o matematice.*

Povídání o matematice totiž opravdu neznamená jen dokazovat Pythagorovu větu – znamená to také hovořit o lásce a vyprávět příběhy o princeznách. I v matematice je krása. Jak řekl básník Fernando Pessoa: „Newtonova binomická věta je stejně krásná jako Venuše z Mélu; ale jen málokdo si toho všimne."

Jen málokdo si toho všimne… Kvůli tomu ten příběh o princezně;

protože jak správně uhodne poslední nápadník, potíž je v tom, že „Nejzajímavější věci této země nejsou vidět“ (Henri Michaux, „Kouzelná země“).

Sám jsem se mnohokrát ocitl v kůži oněch prvních jinochů. A tak jsem se vždycky snažil vysvětlovat nejkrásnější matematické otázky, ale musím přiznat, že mé zanícené pokusy se většinou nesetkaly s předpokládanou odezvou.

Tentokrát se pokusím přiblížit skromnému jinochovi z poslední kapitoly. O matematice, kterou Whitehead nazval „nejoriginálnějším výtvorem lidského ducha“, se toho dá napovídat hodně. Kvůli tomu se koná tento seminář. Ale dnes i já na věci raději pohlížím jinak, *a tak začínám povídkou.*

Projev Pabla Amstera přesně vystihl ústřední myšlenku této knihy. Jejím cílem je projít různé příběhy, svobodně přemýšlet, směle fantazírovat a zastavit se, jakmile člověk narazí na něco úchvatného. Ale zároveň taková místa vyhledávat. Nečekat, že přijdou sama. Tyto řádky si kladou za cíl následující: nadchnout, dojmout, přimět čtenáře, aby se zamiloval, a to buď do matematiky, nebo do některého neznámého příběhu. Doufám, že se mi to podaří.

Čísla

Velká čísla

Velká čísla? Ano. Velká. Těžko si je lze představit. Člověk kolem sebe slyší, že zahraniční zadlužení se pohybuje v miliardách dolarů, že hvězdy na nebi jsou od Země vzdálené mnoho světelných let, že jedna molekula DNA obsahuje tři miliardy nukleotidů, že povrch Slunce dosahuje teploty šest tisíc stupňů Celsia atd. Každého, kdo právě čte tento odstavec, jistě napadnou i další příklady.

Když se já sám ocitnu před takhle velkými čísly, obvykle je srovnávám a dávám si je do protikladu s něčím snáze představitelným.

Na světě je víc než šest miliard lidí. Ve skutečnosti už nás je (v srpnu 2005) víc než šest miliard tři sta milionů. Zdá se to mnoho. Ale co je to vlastně mnoho? Uvidíme. Jaký je rozdíl mezi milionem a miliardou? (Kromě toho, že miliarda má o tři nuly víc.) Abychom se na tato čísla mohli podívat s odstupem, převeďme je na vteřiny. Třeba si představme, že v jedné vesnici, kde se čas měří jen ve vteřinách, někoho obviní ze spáchání trestného činu. Před soudcem, který se případem zabývá, se spolu střetnou žalobce a obhájce. Žalobce pro obviněného požaduje „miliardu vteřin odnětí svobody". Obhájce jeho bláznivý návrh odmítne s tím, že je ochoten přistoupit na „symbolických milion vteřin". Soudce, který je zvyklý takto měřit čas, si je vědom, že jde o obrovský rozdíl. Chápete proč? Zamyslete se: milion vteřin je přibližně jedenáct a půl dne. Ovšem miliarda vteřin už znamená téměř… třicet dva let!

Tento příklad znázorňuje, že obecně nemáme moc dobré povědomí o tom, co čísla vyjadřují, a to dokonce ani v každodenním životě. Vraťme se k tématu obyvatel Země. Jestliže nás je šest miliard, pak kdyby se fotografie každého z nás svázaly do jedné knihy, přičemž tloušťka jednoho listu by byla desetina milimetru, na jednu stranu by se vešlo deset lidí a každý list by se využil oboustranně…, kniha by byla vysoká celých třicet kilometrů! A kdyby si ke všemu chtěl fotografie někdo prohlédnout s tím, že na jednu stranu, tedy deset podobizen, by potřeboval jednu vteřinu a této činnosti by se věnoval šestnáct hodin denně, trvalo by mu dvacet osm a půl let, než by si je všechny prohlédl. A ještě než by dospěl ke konci, v roce 2033, kniha by se zatím rozrostla, jelikož by nás bylo o dvě miliardy víc, a tudíž by se zvětšila o celých deset kilometrů.

Zamysleme se teď nad tím, kolik místa bychom potřebovali, kdybychom se všichni chtěli sejít. Stát Texas (s největší rozlohou ze států USA s výjimkou Aljašky) by mohl pojmout celou populaci. Je to tak. V Texasu se nachází asi čtyři sta dvacet tisíc kilometrů čtverečních obyvatelné plochy. A my, lidé, bychom se tak mohli všichni sejít v Texasu a každý z nás by měl k dispozici pozemek o velikosti sedmdesáti kilometrů čtverečních. To není špatné, vidíte?

Teď se pojďme seřadit tak, aby každý z nás zabral dlaždici o délce strany třicet centimetrů, čili devět set centimetrů čtverečních. Takto by lidstvo vytvořilo řadu delší než milion šest set osmdesát tisíc kilometrů. A to by nám umožnilo se dvaačtyřicetkrát obtočit kolem rovníku.

Co by se stalo, kdybychom se všichni chtěli stát filmovými herci a natočili bychom film, v němž by každý dostal svůj hvězdný okamžik? I kdyby se každý ve filmu mihnul jen patnáct vteřin (což by vyšlo na méně než sedm metrů filmu na člověka), potřebovali bychom celkem čtyřicet milionů kilometrů negativu. A kdyby pak někdo chtěl film vidět, musel by v kině prosedět dvacet tři milionů tři sta třicet tři tisíc tři sta třicet tři hodin, což dělá devět set sedmdesát dva tisíc dvě stě dvacet dva dní, čili asi dva tisíce šest set šedesát tři let. A to pouze

za předpokladu, že bychom nespali, nejedli a nic jiného celý život nedělali. Navrhuji, abychom se rozdělili, každý z nás zhlédne část filmu a pak se sejdeme a převyprávíme si nejlepší momenty.

Více o velkých číslech: váha šachovnice

Uveďme ale i další příklad. Existuje jeden, jenž je znám všem, kteří se chtějí pochlubit ukázkou exponenciálního růstu a ohromit posluchače tím, že jim předvedou, jak čísla narůstají, co se týče… prostě jak *exponenciálně* rostou.

Typickým příkladem jsou zrnka rýže, jimiž chce král odměnit svého poddaného za to, že mu zachránil život. Když mu poddaný řekne, že jediné, co si přeje, je, aby mu na jedno políčko šachovnice dal jedno zrnko rýže, dvě na druhé, čtyři na třetí, osm na čtvrté, šestnáct na páté, třicet dva na šesté a tak pořád dále, aby se počet zrníček rýže vždy zdvojnásobil, dokud nedojde na poslední políčko, král si uvědomí, že na to, aby vyhověl přání svého „zachránce", nevystačí rýže z celého království (ale ani ze sousedních království).

Pojďme si tento příklad trochu přiblížit dnešní době. Místo zrnek rýže vezmeme zlaté valouny o hmotnosti jednoho gramu. Je jisté, že pokud se král nakonec potýkal s rýží, se zlatem by dopadl daleko hůř. Teď se chci ale zeptat na něco trochu jiného – kdyby král mohl splnit, co se po něm žádalo, kolik by šachovnice vážila? Tedy za předpokladu, že by se na šachovnici dalo vysázet množství valounů, které určil poddaný, o kolik by šachovnice měla větší hmotnost? A za jak dlouho by se všechny valouny daly uložit do kapsy, kdyby na každý valoun připadala jedna vteřina?

Jelikož má šachovnice šedesát čtyři políček, dostali bychom osmnáct trilionů valounů. Tady už jsou čísla opět jistě matoucí, protože člověk si vůbec nedokáže představit, jak vypadá „trilion" čehosi. Porovnejme jej tedy s něčím bližším. Už jsme uvedli, že každý valoun váží jeden gram, a tak nás napadne: *Kolik je trilion gramů*?

Trilion gramů odpovídá jednomu bilionu tun. To nám ale moc nepomůže, protože kdo měl někdy jeden bilion něčeho? Taková hmotnost se rovná čtyřem miliardám Boeingů 777 se čtyřmi sty čtyřiceti cestujícími na palubě, s posádkou a palivem na dvacet hodin letu. Sice jsme o něco pokročili, ale i tak by se člověk mohl ptát, kolik vlastně jsou *čtyři miliardy něčeho*.

A jak dlouho by trvalo si valouny naskládat do kapsy, kdyby je člověk mohl ukládat *extra rychlostí* jeden valoun za sekundu? Trvalo by to opět trilion sekund. Ale kolik je trilion sekund? Jak si jej přiblížit? Stačí si představit, že bychom tím zabrali víc než sto miliard let. Nevím jak vy, ale já svůj čas hodlám strávit jinak.

Atomy ve vesmíru

Jen pro zajímavost, abychom si ukázali *další obrovské číslo*, vezměte v potaz, že se ve vesmíru nachází odhadem 2^{300} atomů. Jestliže 2^{10} je přibližně 10^3, pak 2^{300} je asi 10^{90}. A tohle všechno jsem napsal proto, abych mohl říci, že počet atomů ve vesmíru může být zapsaný číslem *jedna s devadesáti nulami*.

Co je světelný rok?

Světelný rok je měřítkem vzdálenosti, nikoli času. Měří vzdálenost, kterou světlo urazí za jeden rok. Abychom si věc mohli lépe představit, řekněme, že rychlost světla je 300 000 kilometrů za sekundu. Když se toto číslo vynásobí 60 (převedeme je tak na minuty), vychází nám 18 000 000 kilometrů za *minutu*. A když se toto číslo opět vynásobí číslem 60, znamená to 1 080 000 000 kilometrů za *hodinu* (jedna miliarda osmdesát milionů kilometrů za hodinu). Když je vynásobíme číslem 24, vychází, že světlo urazilo 25 920 000 000 (25 miliard kilometrů za *jeden den*).

A konečně, když toto číslo vynásobíme 365 dny, jeden světelný rok (tedy vzdálenost, kterou světlo urazí za jeden rok) je (přibližně) 9 460 000 000 000 (téměř *devět a půl bilionu*) kilometrů.

Takže až se vás někdo zeptá, kolik je jeden světelný rok, můžete zasvěceně odpovědět, že se jedná o způsob měření vzdálenosti (sice veliké, ale pořád vzdálenosti) a že to je téměř devět a půl bilionu kilometrů. Docela dálka, viďte?

Zajímavá čísla

Nyní bych rád dokázal, že *všechna přirozená čísla jsou „zajímavá"*. Nabízí se tak první otázka, co to vlastně znamená, když je nějaké číslo *zajímavé*? Řekněme, že se jím stane, pokud je něčím přitažlivé, něčím se liší od ostatních čísel, právem něčím vyniká, je nějak omezené nebo neobvyklé. Teď už snad všichni chápeme, co míním slovem *zajímavý*. A teď k důkazům.

Číslo jedna je zajímavé, protože je první ze všech. Liší se tedy skutečností, že je nejmenší ze všech přirozených čísel.

Číslo dvě je zajímavé hned z několika důvodů – je to první sudé číslo a také první prvočíslo*. Tyto dva argumenty úplně stačí k tomu, abychom ho mohli považovat za výjimečné.

Číslo tři je zajímavé tím, že jde o první liché číslo, které je zároveň prvočíslem (stačí si vybrat jeden z mnoha možných důvodů).

Číslo čtyři je zajímavé proto, že vyjadřuje *mocninu čísla dvě*.

Číslo pět je zajímavé tím, že se jedná o prvočíslo. A tak bychom mohli pokračovat dál s vědomím, že pokud je nějaké číslo prvočíslem, už to pro něj znamená důležitou vlastnost, díky níž se liší od ostatních, a my ho tak můžeme považovat za *zajímavé a nemusíme pátrat po dalších důkazech.*

Ale pojďme dál.

Číslo šest je zajímavé proto, že jde o první složené číslo (*že tedy*

* Jak uvidíme dále, prvočísla jsou čísla dělitelná jen číslem jedna a sama sebou.