

Finanční matematika *v praxi*



Spoření a pravidelné investice | Investiční rozhodování | Úvěry a půjčky
Důchody a renty | Cenné papíry a měnové kurzy | Reálné příklady z praxe
Výuková videa na internetu

Oldřich Šoba, Martin Širůček, Roman Ptáček

FINANČNÍ MATEMATIKA

v praxi

Grada Publishing

Tato publikace vznikla v průběhu řešení projektu operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost CZ.1.07/2.2.00/15.0060 Studijní opory pro studenty bakalářského stupně studia. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ing. Oldřich Šoba, Ph.D.

Ing. Martin Širůček

Ing. Roman Ptáček, Ph.D.

Finanční matematika v praxi

TIRÁŽ TIŠTĚNÉ PUBLIKACE:

Kniha je monografie

Vydala Grada Publishing, a.s.

U Průhonu 22, 170 00 Praha 7

tel.: +420 234 264 401, fax: +420 234 264 400

www.grada.cz

jako svou 5103. publikaci

Odborně recenzoval:

prof. Ing. Oldřich Rejnuš, CSc.

Vydání odborné knihy schválila Vědecká redakce nakladatelství Grada Publishing, a.s.

Odpovědný redaktor Václav Ječmínek

Sazba Antonín Plicka

Počet stran 304

První vydání, Praha 2013

Vytisklo TISK CENTRUM s.r.o., Moravany

© Grada Publishing, a.s., 2013

Cover Photo © fotobanka allphoto

ISBN 978-80-247-4636-4

ELEKTRONICKÉ PUBLIKACE:

ISBN 978-80-247-8424-3 (ve formátu PDF)

ISBN 978-80-247-8425-0 (ve formátu EPUB)

Upozornění pro čtenáře a uživatele této knihy

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této tištěné či elektronické knihy nesmí být reprodukována ani šířena v papírové, elektronické či jiné podobě bez předchozího písemného souhlasu nakladatele. Neoprávněné užití této knihy bude trestně stíháno.

Obsah

O autorech	8
Úvod	9
1 Úvod do finanční matematiky	11
1.1 Časová hodnota peněz	11
1.2 Úrok a úroková sazba	13
1.3 Čas ve finanční matematice	14
1.4 Úroková sazba versus zdanění a inflace	16
1.5 Úrokové období	20
1.6 Výpočet úroku	20
1.7 Typy úročení	21
1.8 Procento versus procentní bod	25
2 Jednoduché úročení a jeho využití	27
2.1 Jednoduché úročení polhůtní	27
2.2 Jednoduché úročení předlůtní	31
2.3 Srovnání polhůtního a předlůtního úročení	34
2.4 Úročení běžných účtů	36
2.5 Skonto	39
2.6 Další řešené příklady	42
2.7 Příklady k procvičení	44
3 Složené úročení a jeho využití	45
3.1 Základní rovnice složeného úročení	45
3.2 Efektivní úroková míra	52
3.3 Spojité úročení	56
3.4 Smíšené úročení	57
3.5 Další řešené příklady	58
3.6 Příklady k procvičení	62
4 Spoření a pravidelné investice	63
4.1 Budoucí hodnota anuity	64
4.2 Výpočet budoucí hodnoty anuity	67
4.3 Výpočet výše pravidelné úložky	69

4.4	Výpočet doby spoření	71
4.5	Výpočet úrokové sazby	73
4.6	Kombinace spoření a jednorázových částek	75
4.7	Změna podmínek v průběhu spoření	77
4.8	Další řešené příklady	80
4.9	Příklady k procvičení	83
5	Důchody a renty	85
5.1	Současná hodnota annuity	85
5.2	Výpočet současné hodnoty annuity	90
5.3	Výpočet výše vypláceného důchodu	93
5.4	Odložený důchod	95
5.5	Výpočet doby výplaty důchodu	98
5.6	Kombinace důchodu a jednorázových částek	102
5.7	Příklady k procvičení	105
6	Kombinace spoření a důchodu	107
6.1	Základní typ kombinace	108
6.2	Další typy kombinace	113
6.3	Příklady k procvičení	119
7	Úvěry a půjčky	121
7.1	Splácení stejnými splátkami	124
7.2	Splácení nestejnými splátkami	134
7.3	Další řešené příklady	135
7.4	Roční procentní sazba nákladů	138
7.5	Příklady k procvičení	146
8	Investiční rozhodování	147
8.1	Investiční trojúhelník	149
8.2	Výnosnost investice	153
8.3	Rizikovitost investice	162
8.4	Analýza výnosnosti a rizikovitosti	166
8.5	Příklady k procvičení	169
9	Směnky a jiné krátkodobé cenné papíry	171
9.1	Eskont směnky a eskontní úvěr	176
9.2	Střední doba splatnosti	179
9.3	Směnka jako investiční příležitost	181
9.4	Ostatní krátkodobé cenné papíry	182
9.5	Příklady k procvičení	186

10	Investice na dluhopisovém trhu I: cena a výnosnost	189
10.1	Rozdělení obligací	189
10.2	Cena obligace	193
10.3	Výnosnost obligace	200
10.4	Cena kuponové obligace mezi kuponovými platbami	208
10.5	Příklady k procvičení	215
11	Investice na dluhopisovém trhu II: výnosové křivky, rating a durace	217
11.1	Výnosové křivky	217
11.2	Rating a durace obligace	223
11.3	Příklady k procvičení	236
12	Investice na akciovém trhu	239
12.1	Rozdělení akcií	240
12.2	Cena akcie	243
12.3	Výnosnost akcií	251
12.4	Štěpení akcií	255
12.5	Odebírací práva	257
12.6	Další příklady k procvičení	260
13	Operace na měnovém trhu	263
13.1	Spotové operace na měnovém trhu	267
13.2	Termínové operace na měnovém trhu	273
13.3	Příklady k procvičení	281
	Příloha 1: Zohlednění inflace ve výpočtech	283
	Příloha 2: Použité vzorce	295
	Použitá literatura	299
	Shrnutí	300
	Summary	300

O autorech

Ing. Oldřich Šoba, Ph.D.

Absolvoval doktorské studium v oboru Finance na Provozně ekonomické fakultě Mendelovy univerzity v Brně. V současné době působí na Ústavu financí této univerzity, kde vyučuje oblast finančních a kapitálových trhů a finanční matematiky. Rovněž spolupracuje s finančními institucemi na vzdělávacích projektech v oblasti financí a finančního poradenství. V minulosti také pracoval jako redaktor a ekonomický analytik v dotačním poradenství.



Ing. Martin Širůček

Působí na Provozně ekonomické fakultě Mendelovy univerzity v Brně. Podílí se na výuce předmětů Finanční trhy a Kapitálové trhy. Jeho odborná orientace směřuje do oblasti akciových a dluhopisových trhů, zejména analýzy vzniku cenových bublin a faktorů, které je způsobují. Dále se zajímá o problematiku kolektivního investování a využití strukturovaných produktů.



Ing. Roman Ptáček, Ph.D.

Působí zejména na Provozně ekonomické fakultě Mendelovy univerzity v Brně jako odborný asistent na Ústavu financí, ale spolupracuje také s dalšími vysokými školami i se soukromým sektorem působícím na finančním trhu. Jeho odborná specializace směřuje do oblasti osobních a rodinných financí, investičního rozhodování, obchodování s cennými papíry a kolektivního investování.



Úvod

Slovo matematika vyvolává v řadě lidí už od mládí nechuť. Pro mnohé se tato disciplína stala neoblíbenou už na základní škole a od té doby se obvykle nic nezměnilo. Často byla tato nechuť vyvolána tím, že si lidé nedokázali pod danými pojmy a výpočty nic představit.

Například aritmetická a geometrická posloupnost se vysvětlovaly a prověřovaly na nic neříkajících číslech a bylo nutno znát všechny vzorce z paměti. Mnozí lidé tak aritmetickou a geometrickou posloupnost nyní považují za neurčité pojmy v matematice nebo je ze své paměti dokonce již vytěsnili úplně.

Místo toho mohly být tyto pojmy vysvětlovány na praktických věcech, se kterými se člověk setkává v každodenním životě. Princip aritmetické a geometrické posloupnosti je totiž aplikován ve finanční sféře při jednoduchém a složeném úročení, které je součástí prakticky jakéhokoliv finančního produktu. Může se jednat o běžné účty, spořicí účty, úvěry, pravidelné investice do podílových fondů, stavební spoření nebo spoření na penzi či složitější operace, jako jsou investice do cenných papírů, například dluhopisy, akcie a další.

Pokud by tyto pojmy byly vysvětlovány na příkladech z peněžní oblasti, která je součástí života každého z nás, asi by z paměti nevymizely. Finanční gramotnost českého obyvatelstva by možná byla lepší než v současnosti.

I když finanční matematika obsahuje ono často nenáviděné slovo „matematika“, je jejím obsahem zejména uvedená aritmetická a geometrická posloupnost neboli jednoduché a složené úročení. A není na ní vůbec nic složitého, pokud je jednoduše a zejména prakticky vysvětlována. Stává se z ní pak zajímavá hra s čísly, kterou využijeme v běžném životě.

Tato publikace si neklade za cíl rozvíjet finanční matematiku jako vědu, ale jednoduše a hlavně prakticky ji vysvětlovat, i když se někdy dopustíme dílčího zjednodušení, které ovšem nebude mít na nic podstatného vliv. Například úrokové sazby a další proměnné u jednotlivých příkladů v této knize nemusí odpovídat aktuálním podmínkám na českém trhu. Jednak jde pouze o příklady a jednak by při současných velmi nízkých úrokových sazbách mohly být zkresleny výsledky při jejich převodech a následném zaokrouhlování.

Knihla je doplněna o **výuková videa**, jež se používají na několika vysokých školách. Jednotlivé kapitoly knihy tvoří podkladové materiály k těmto výukovým videím, která jsou dostupná na adrese www.pef.mendelu.cz/financni_matematika. Tato publikace a videa vám snad umožní, abyste se finanční matematiky přestali obávat a začali ji prakticky využívat ve svůj prospěch. Přejeme vám pěkné čtení!

Oldřich Šoba, Martin Širůček, Roman Ptáček

1 Úvod do finanční matematiky

V rámci videokurzu Finanční matematika se této kapitole věnuje díl 1.

Jednotná definice finanční matematiky neexistuje, lze si tak ale obecně představit jakékoliv matematické operace ve finanční sféře. Finanční matematika využívá aparátu, který je součástí středoškolské matematiky, pouze jej aplikuje do finanční oblasti, a proto není třeba se obávat přílišné složitosti. U finanční matematiky je totiž nutno pochopit princip, na kterém je založena a který důsledně uplatňuje, poté je vše nejenom relativně jednoduché, ale i velice zajímavé. Tímto principem je **časová hodnota peněz**.

1.1 Časová hodnota peněz

Časová hodnota peněz je založena na myšlence, že peníze mají v různém okamžiku různou hodnotu neboli že hodnota peněz se v průběhu času mění. Kromě toho, že každý investor preferuje více peněz než méně a méně rizika než více, preferuje také stejné množství peněz dříve než později. Princip časové hodnoty peněz lze demonstrovat na příkladu 1.1.

Příklad 1.1 Časová hodnota peněz

Obecně platí, že stokoruna obdržená dnes má vyšší hodnotu než stokoruna obdržená za rok. Je tomu z toho důvodu, že pokud současná stokoruna bude uložena a úročena, zúročí se a za rok budeme mít více než sto korun. Například při 5% roční úrokové sazbě by se za rok zúročila na 105 Kč, což je více než 100 Kč obdržených za rok.

To znamená, že budoucí hodnota současné stokoruny je za rok 105 Kč. Ale platí to i zpětně, to znamená, že současná hodnota 105 Kč obdržených za rok je při 5% roční úrokové sazbě 100 Kč. Pokud bychom tedy chtěli mít za rok (budoucí hodnota) na účtu 105 Kč při 5% roční úrokové sazbě, museli bychom na něj nyní (současná hodnota) uložit 100 Kč.

To znamená, že při 5% roční úrokové sazbě má stejnou hodnotu současných 100 Kč nebo za rok obdržených 105 Kč. Pokud by ovšem byla aplikována roční úroková sazba 6 %, byla by budoucí hodnota současných 100 Kč rovna za rok 106 Kč, což by bylo více než 105 Kč obdržených za rok, a proto by mělo vyšší hodnotu 100 Kč obdržených dnes než 105 Kč obdržených za rok.

Princip, resp. metoda časové hodnoty peněz je založena na převodu hodnoty peněz k určitému časovému okamžiku, a to prostřednictvím úročení stanovenou úrokovou sazbou. Finanční matematika tak převádí hodnotu peněz k určitému časovému okamžiku, a to buď k jejich budoucí, nebo současné hodnotě.

a) Budoucí hodnota (future value – FV)

Pokud chceme vypočítat, jakou částku budeme mít na spořicímu účtu, nebo na jakou hodnotu naroste zvolená investice, počítáme budoucí hodnotu peněz.

b) Současná hodnota (present value – PV)

Pokud ale naopak chceme vypočítat, kolik musíme nyní uložit na účet, abychom získali v budoucnu určitou částku, nebo jakou hodnotu pro nás má v současnosti určitá investice, počítáme naopak současnou hodnotu peněz.

Přitom ovšem platí, že pokud chceme určité peněžní částky mezi sebou sčítat, odčítat, porovnávat atd., musí být jejich hodnoty vztaženy vždy ke stejnému časovému okamžiku. Pro porovnání hodnot peněz u zvolených alternativ není podstatné, ke kterému časovému okamžiku hodnotu peněz vztáhneme, musí se ale jednat o stejný časový okamžik. Vysvětlíme si to na příkladu 1.2.

Příklad 1.2 Aplikace časové hodnoty peněz**Má vyšší hodnotu 1 000 Kč obdržených dnes nebo 1 100 Kč obdržených za rok při roční úrokové sazbě 15 %?**

Tento příklad má nekonečně mnoho možných způsobů řešení, ovšem závěr, která z daných alternativ má vyšší hodnotu, bude vždy stejný. Máme tedy dvě alternativy a máme stanovit, která z nich má vyšší hodnotu:

Alternativa A: 1 000 Kč obdržených dnes, to znamená v období 0.

Alternativa B: 1 100 Kč obdržených za rok, to znamená v období 1.

Pro převod hodnot peněz z obou alternativ ke stejnému okamžiku máme využít roční úrokové sazby 15 %. Není v tomto případě podstatné, ke kterému okamžiku hodnotu peněz z obou alternativ převedeme, může se jednat o současnost, období za 1 rok, za 5 let, za 10 let atd. Hlavně se musí u obou alternativ jednat o stejný časový okamžik. Ukážeme si řešení jednak při převodu na současný okamžik, jednak při převodu na období za 1 rok.

	Převod hodnoty peněz k současnému okamžiku	Převod hodnoty peněz k období za 1 rok
Alternativa A	1 000 Kč	$1\,000 \cdot (1 + 0,15) = 1\,150$ Kč
Alternativa B	$1\,100 / (1 + 0,15) = 956,52$ Kč	1 100 Kč
Závěr	Vyšší hodnota peněz je u alternativy A	Vyšší hodnota peněz je u alternativy A

U každé z obou alternativ obsahuje tmavě šedá buňka částku vztahující se k jejímu zadání. To znamená částka 1 000 Kč v současném okamžiku u alternativy A a částka 1 100 Kč v období za 1 rok u alternativy B. Není možné jednoduše srovnat částky 1 000 Kč vs. 1 100 Kč, jelikož každá je vztažena k jinému časovému okamžiku, ale je nutno stanovit hodnotu obou částek ke stejnému časovému okamžiku. Opět je nutno připomenout, že není v tomto případě podstatné ke kterému okamžiku, ale musí se jednat o stejný časový okamžik. Je tedy nutno srovnávat částky vždy ve stejném sloupci (stejný časový okamžik), a nikoliv křížem v rámci obou sloupců (jiný časový okamžik).

Jak vyplývá z řešení příkladu, závěr je v obou případech naprosto shodný, vyšší hodnotu představuje alternativa A. To lze vysvětlit tak (např. v rámci převodu hodnoty peněz k období za 1 rok), že pokud nyní uložíme 1 000 Kč na účet, budeme mít za 1 rok při 15% roční úrokové sazbě na tomto účtu 1 150 Kč, což je více než 1 100 Kč obdržených za rok.

Princip, resp. metoda časové hodnoty peněz využívá převodu hodnoty peněz k určitému časovému okamžiku. V případě výpočtu budoucí hodnoty se jedná o tzv. úročení, v případě současné hodnoty o odúročení (také tzv. diskontování), a to vše prostřednictvím úrokové sazby. Mezi základní pojmy časové hodnoty peněz a celé finanční matematiky tak patří úrok a úroková sazba.

1.2 Úrok a úroková sazba

Úrok je obecně cena peněz, resp. cena za zapůjčení peněz z pohledu dlužníka a odměna za zapůjčení peněz z pohledu věřitele. Výše úroku se udává v peněžních jednotkách a je závislá zejména na úrokové sazbě.

Úroková sazba je úrok vyjádřený v procentech z hodnoty kapitálu. Úroková sazba se vždy vztahuje k určité délce časového období. O jaké časové období se jedná, udává dodatek (zkratka) u dané úrokové sazby. Převody mezi úrokovými sazbami vztahujícími se k různému časovému období využívají prostého dělení (při převodu z delšího časového období úrokové sazby na kratší), či naopak násobení (při převodu z kratšího časového období úrokové sazby na delší). Přehledně to demonstuje tabulka 1.1.

Tabulka 1.1 *Úrokové sazby dle souvisejícího časového období*

časové období související s úrokovou sazbou	dodatek (zkratka) u úrokové sazby	způsob převodu
rok => roční úroková sazba	p. a.	12 % p. a. => 12 % p. a.
pololetí => pololetní úroková sazba	p. s.	12 % p. a. => 6 % p. s.
čtvrtletí => čtvrtletní úroková sazba	p. q.	12 % p. a. => 3 % p. q.
měsíc => měsíční úroková sazba	p. m.	12 % p. a. => 1 % p. m.
den => denní úroková sazba	p. d.	12 % p. a. => 12/360 % p. d. nebo 12 % p. a. => 12/365 % p. d.

Upozornění

Jak vyplývá z tabulky 1.1, je nutno rozlišovat, k jak dlouhému časovému období je úroková sazba vztažena. Neznalosti této skutečnosti využívají často různé „pochybné společnosti“, a to např. při poskytování půjček. V jejich nabídce je často velmi lákavá úroková sazba např. ve výši 5 %, ovšem velmi malým písmem je dopsáno „p. m.“. To znamená, že to odpovídá roční úrokové sazbě 60 % p. a., což už samozřejmě tak výhodná nabídka není. Obdobného principu využívají i některé bankovní domy, a to např. při nabídce spořicíh účtů, kde uvádí jejich vysoký výnos (např. 6 %), ovšem opět malým písmem doplňují, že se jedná o 2letý, či dokonce 3letý výnos daného spořicího účtu.

Úrokových sazeb existuje v ekonomice vysoký počet a také existuje více druhů úrokových sazeb, které se v rámci finanční matematiky využívají. Proto je nutno zvolit pro daný případ vždy ten správný druh úrokové sazby. Podrobněji se budeme věnovat různým druhům úrokových sazeb vždy v rámci konkrétní problematiky. Rovněž platí, že každá úroková sazba je udávána v procentech, ovšem do vzorců ve finanční matematice se dosazuje v relativním vyjádření. To znamená, že pokud se rovná úroková sazba např. 3 %, bude dosazeno 0,03 apod. Tento způsob zápisu jsme ostatně již aplikovali jak v příkladu 1.1, tak v příkladu 1.2.

5 % → 0,05

10 % → 0,10

Kromě pojmu úroková sazba existuje ještě pojem úroková míra, který je s pojmem úroková sazba často zaměňován. Rozdíl mezi pojmy úroková sazba a úroková míra není tolik významný, jako je tomu mezi pojmy úrok a úroková sazba. Rozdíl mezi úrokovou sazbou a úrokovou mírou je spíše v teoretické rovině, kdy úroková sazba představuje něco konkrétního a týká se např. určitého finančního produktu. Naproti tomu úroková míra je veličina, která se počítá, resp. odvozuje z jednotlivých úrokových sazeb. Praktický rozdíl mezi pojmy úroková sazba a úroková míra uvádí text v následujícím rámečku.

Upozornění: Úroková sazba versus úroková míra

Úroková sazba

Jedná se o veličinu, která je přímo určena nějakým subjektem, např. obchodní bankou, centrální bankou atd. Příkladem může být úroková sazba konkrétního spořicího účtu ve výši 2,00 % p. a.

Úroková míra

Jedná se o veličinu odvozenou (vypočítanou) z různých úrokových sazeb. Příkladem může být průměrná úroková sazba spořicích účtů v ČR. Poté lze napsat, že úroková míra u spořicích účtů se v ČR pohybuje ve výši cca 2 % p. a. Obdobným způsobem se z jiných veličin počítají i jiné míry, např. míra inflace atd.

Jak ovšem bylo uvedeno, zaměňování pojmů úroková sazba a úroková míra je běžné a nelze to považovat za závažnou chybu. Rozdíl je opravdu pouze v teoretické (terminologické) rovině, jelikož obě veličiny jsou udávány v procentech. Mnohem významnější chybou je zaměňování pojmů úrok a úroková sazba, kdy úrok je v peněžních jednotkách, kdežto úroková sazba se udává v procentech.

1.3 Čas ve finanční matematice

Při počítání času je ve finanční matematice využíváno různých standardů, které se od sebe částečně, ale na druhou stranu pouze relativně nepatrně odlišují. Jiné standardy při počítání času se již projevily v posledním řádku tabulky 1.1, kdy se převáděla roční úroková sazba na denní úrokovou sazbu. Ve finanční matematice v rámci kvantifikace času existují následující tři standardy, které budeme stručně charakterizovat:

a) Německý standard

Jedná se o velmi jednoduchý a používaný standard, který bude převážně využíván i v rámci této knihy a označuje se jako 30E/360. Tento standard zjednodušeně říká, že každý měsíc má 30 dní, a to bez ohledu na jeho skutečný počet dní, a každý rok má 360 dní. To znamená, že pokud byly peníze na účtu po dobu přesně dvou měsíců, jedná se při vyjádření ve dnech o 60 dní a nemusí se rozlišovat, zdali dané měsíce měly 30, 31, či dokonce 28 dní. I když se jedná o únor s 28 dny nebo o březen s 31 dny, každý měsíc má dle tohoto standardu 30 dní a každý rok 360 dní.

b) Francouzský standard

Tento standard se označuje jako ACT/360 a počítá se skutečným počtem dní v měsíci a s 360 dny v roce. V rámci tohoto standardu se tedy již musí rozlišovat, zdali se jedná o měsíc únor s 28 dny, nebo o měsíc březen s 31 dny.

c) Anglický standard

Poslední standard se označuje jako ACT/365 a počítá se skutečným počtem dní jak v měsíci, tak v roce. V případě roku počítá s 365 dny, pokud se nejedná o přestupný rok, a s 366 dny u přestupného roku.

Při aplikaci jednotlivých standardů ve výpočtech je kvůli odlišnému uvažování počtu dní v měsíci a roce dosahováno odlišných výsledků, ovšem rozdíly ve výsledcích nejsou nikterak závratné. To lze demonstrovat na příkladu 1.3. Rozdíly jsou v daném případě opravdu malé.

Příklad 1.3 Standardy pro počítání času

Vyjádřeme v rocích celé měsíce únor a březen dle jednotlivých standardů v případech, kdy se nejedná a kdy se jedná o přestupný rok.

a) nejedná se o přestupný rok

počet dní v únoru: 28
počet dní v březnu: 31
počet dní v roce: 365

standard	únor (28 dnů) a březen (31 dnů), vyjádřeno v rocích
30E/360	60/360
ACT/360	59/360
ACT/365	59/365

b) jedná se o přestupný rok

počet dní v únoru: 29
počet dní v březnu: 31
počet dní v roce: 366

standard	únor (29 dnů) a březen (31 dnů), vyjádřeno v rocích
30E/360	60/360
ACT/360	60/360
ACT/365	60/366

Jak vyplývá z obrázku 1.1, konkrétně z první věty, v případě UniCredit Bank se dle Všeobecných obchodních podmínek této finanční instituce používá standard anglický (ACT/365), kdy se uvažuje skutečný počet dní v měsících i v kalendářních rocích.

...

20.2 Při výpočtu úroků z kreditního zůstatku na účtu se vychází ze skutečného počtu dní v kalendářním roce a skutečného počtu dní trvání vkladu. Úroková sazba se standardně vztahuje na celou výši kreditního zůstatku. Kreditní zůstatek účtu lze rozdělit do jednotlivých pásem, pro která může Banka stanovit samostatnou úrokovou sazbu. Banka používá k výpočtu úroků sazbu vztahující se k části kreditního zůstatku v daném pásmu, není-li dohodnuto jinak.

...

Obrázek 1.1 Určení standardu ve Všeobecných obchodních podmínkách

Zdroj: UniCredit Bank

1.4 Úroková sazba versus zdanění a inflace

Jak již bylo uvedeno, existují různé druhy úrokových sazeb. Úrokové sazby lze také členit dle následujících dvou kritérií:

- a) zohlednění vlivu zdanění úrokových příjmů,
- b) zohlednění vlivu působení inflace.

Na základě prvního z uvedených kritérií (zohlednění vlivu zdanění úrokových příjmů) se rozlišuje:

- **hrubá úroková sazba,**
- **čistá úroková sazba.**

Hrubá úroková sazba nezohledňuje vliv zdanění úrokových příjmů, kdežto čistá úroková sazba tento vliv zohledňuje. Je to obdobný princip jako rozdíl mezi hrubou a čistou mzdou. Matematický vztah mezi čistou a hrubou úrokovou sazbou je následující:

$$r_c = r_h \cdot (1 - r_{dp}) \quad (1.1)$$

kde: r_c = čistá úroková sazba,
 r_h = hrubá úroková sazba,
 r_{dp} = sazba daně z příjmů.

V případě České republiky jsou úroky např. u spořicích a termínovaných účtů v bankách zdaňovány srážkovou daní přímo u zdroje, a to ve výši 15 %. To znamená, že jsou připisovány úroky po zdanění, tedy čisté úroky.

Upozornění

Ve finanční matematice platí následující důležitá skutečnost. Pokud má být uvažován při výpočtech vliv zdanění úroků, resp. uvažovány pouze čisté úroky, je nutno do daných vzorců dosazovat úrokovou sazbu po zdanění, to znamená čistou úrokovou sazbu.

Na základě druhého z výše uvedených kritérií (zohlednění vlivu působení inflace) se rozlišuje:

- **nominální úroková sazba,**
- **reálná úroková sazba.**

Nominální úroková sazba tedy nezohledňuje vliv inflace, kdežto reálná úroková sazba tento vliv zohledňuje. Matematický vztah mezi reálnou a nominální úrokovou sazbou a mírou inflace je následující:

$$r_r = \frac{r_n - r_i}{1 + r_i} \quad (1.2)$$

kde: r_r = reálná úroková sazba,
 r_n = nominální úroková sazba,
 r_i = míra inflace.

Ke vztahu 1.2 je nutno uvést dvě poznámky:

1. V případě nízké nominální úrokové sazby a nízké míry inflace (cca do 5 %) lze pro výpočet reálné úrokové sazby tyto dvě proměnné pouze odečíst bez aplikace jmenovatele. Při použití celého uvedeného vztahu je ovšem výpočet reálné úrokové sazby vždy přesnější.
2. Nominální úroková sazba a míra inflace vstupující do výpočtu se musí vztahovat ke stejnému období, a to nejenom pokud se týká jeho délky, ale i stejného časového úseku. Nelze tak vycházet z nominální úrokové sazby pro nadcházející období na jedné straně a na straně druhé používat historickou inflaci. Pokud se má jednat o nominální úrokovou sazbu pro nadcházející období, je nutno vycházet z očekávané inflace za stejné období. Pokud se vychází z historické nominální úrokové sazby, je logicky nutno vycházet i z historické inflace, a to za naprosto stejné období. To znamená, že není možno vycházet např. z meziroční inflace a pololetní nominální úrokové sazby.

Samozřejmě lze jednotlivé druhy uvedených úrokových sazeb navzájem kombinovat, což znamená, že existuje hrubá nominální úroková sazba, čistá nominální úroková sazba, hrubá reálná úroková sazba a čistá reálná úroková sazba. Otázkou ovšem zůstává, jakým způsobem lze hodnoty těchto jednotlivých úrokových sazeb interpretovat. Místo uvádění teoretických pouček bude vhodnější tuto problematiku demonstrovat na příkladu 1.4.

Příklad 1.4 Vliv zdanění a inflace

Předpokládejme, že byla uzavřena smlouva o ročním termínovaném vkladu s úrokovou sazbou 4 % p. a. a na tento účet byla uložena na počátku částka 10 000 Kč.

Skutečnost, že ve smlouvě o tomto vkladu je uvedena úroková sazba 4 % p. a., neznamená, že na konci roku bude na účtu o 4 % peněžních prostředků více, než byl počáteční vklad. A už vůbec to neznamená, že si na konci roku bude možno koupit díky zhodnocení počátečního vkladu průměrně o 4 % zboží a služeb více než za počáteční vklad.

Prvním faktorem, který „ukrojí“ z připsaných úroků, je daň z příjmů, která je často srážena u zdroje a je odvedena státu přímo bankou či obecně plátcem daně. Po zohlednění daně z příjmů získáme z hrubé úrokové sazby čistou úrokovou sazbu. Čistá úroková sazba úroku je poté dána výpočtem:

$$r_c = r_h \cdot (1 - r_{dp}) = 0,04 \cdot (1 - 0,15) = 0,034 \Rightarrow 3,40 \% \text{ p. a.}$$

Čistá úroková sazba v tomto případě vyjadřuje, o kolik procent bude na konci roku na účtu více peněžních prostředků oproti počátečnímu vkladu na počátku roku, a to po zdanění. V tomto případě tedy o 3,40 %. To znamená, že na začátku roku bylo vloženo 10 000 Kč a na konci roku zde bude 10 340 Kč.

Banka tedy vypočítala úroky ve výši 400 Kč, z toho 15 % (60 Kč) bylo odvedeno ve formě daně a zbytek (340 Kč) připsala jako čisté úroky. Úroková sazba 3,40 % p. a. je sice čistá, ale stále nominální, což znamená, že zde není zohledněno působení inflace.

Druhým faktorem, který „ukrojí“ z úrokové sazby, resp. nominální výnosnosti termínovaného vkladu, je zmiňovaná inflace. Po zohlednění inflace se z nominální úrokové sazby získá reálná úroková sazba. Pokud bude uvažována roční míra inflace za stejné období jako trvání termínovaného vkladu ve výši 3,50 %, je reálná úroková sazba po zohlednění daně z příjmů (to znamená, že se jedná o čistou reálnou úrokovou sazbu) rovna:

$$r_r = \frac{0,0340 - 0,0350}{1 + 0,0350} = -0,097 \% \text{ p. a.}$$

Tuto čistou reálnou úrokovou sazbu, která vychází záporně, a to konkrétně $-0,097\%$, lze interpretovat tak, že za částku 10 340 Kč, která bude na konci roku po zohlednění zdanění na účtu, si bude možno koupit průměrně o $0,097\%$ méně zboží a služeb než za částku 10 000 Kč, která byla na účtu na začátku roku. V tomto případě tedy díky působení inflace dochází k poklesu reálné kupní síly peněz. Závěry příkladu lze interpretovat tak, že díky uložení peněz na daný termínovaný vklad s úrokovou sazbou 4% p. a. a sazbě daně z úrokových příjmů 15% bude na konci roku na účtu o $3,40\%$ peněžních prostředků více než na jeho počátku, ale na konci roku si za koncovou částku (10 340 Kč) koupíme při inflaci $3,5\%$ průměrně o $0,097\%$ zboží a služeb méně než za částku, která byla na účtu na počátku roku (10 000 Kč). Důležité je slovo „průměrně“, inflace se totiž měří pro spotřebitelské účely nejčastěji prostřednictvím indexu spotřebitelských cen (CPI), jenž vychází z cenového nárůstu položek, které jsou vybrány do tzv. spotřebitelského koše (viz tabulka níže), přičemž jednotlivé položky mají v daném koši různou váhu dle toho, jak průměrně zatěžují domácí rozpočty. Jedná se např. o položky reprezentující nájemné či obecně náklady na bydlení, potraviny, odívání atd. Pokud se ovšem spotřební koš dané domácnosti liší od spotřebního koše, dle kterého je kvantifikována inflace, může být dopad působení inflace u dané domácnosti jak vyšší, tak nižší.

Spotřební koš pro výpočet indexu spotřebitelských cen od ledna 2013, domácnosti celkem – stálé váhy roku 2010

COICOP	Název	Váha
01	Potraviny a nealkoholické nápoje	149,822762
02	Alkoholické nápoje, tabák	96,007677
03	Odívání a obuv	35,930374
04	Bydlení, voda, energie, paliva	280,354952
05	Bytové vybavení, zařízení domácnosti	57,971658
06	Zdraví	23,074500
07	Doprava	105,006601
08	Pošty a telekomunikace	36,078930
09	Rekreace a kultura	90,377993
10	Vzdělávání	7,782688
11	Stravování a ubytování	48,561261
12	Ostatní zboží a služby	69,030604

Zdroj: Český statistický úřad

Dále je nutno uvést, že pokud by peníze zůstaly „doma ve slavníku s 0% úrokovou sazbou“ a nebyly by uloženy na uvedený termínovaný vklad, byla by čistá nominální úroková sazba rovna 0% p. a. a po zohlednění vlivu působení inflace by čistá reálná úroková sazba činila cca $-3,38\%$ p. a. To znamená, že uložení peněz na uvedený termínovaný vklad mírnilo negativní působení inflace na reálnou kupní sílu peněz.

Záporná reálná úroková sazba není především u běžných, spořicíh a termínovaných účtů žádnou vzácností, jelikož výše úročení těchto produktů velmi často nedosahuje po zdanění úrovně inflace (viz řádek „Čisté reálné sazby z vkladů domácností s dohodnutou splatností“ v rámci

obrázku 1.2). U úrokových sazeb úvěrů, které jsou obvykle vyšší, je tento jev méně častý, ale nastat samozřejmě může, což by bylo pro dlužníky velice výhodné. Inflace totiž u dlužníků vždy snižuje reálnou hodnotu jejich závazků a reálná úroková sazba úvěru nemusí být ani záporná.

Tabulka A.3.1 Úrokové sazby – roční průměrné sazby – v % p. a.

	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
									Predikce	Predikce
Repo 2T ČNB (konec roku)	2,00	2,50	2,00	2,50	3,50	2,25	1,00	0,75	.	.
Hlavní refinanční sazba ECB (konec roku)	2,00	2,00	2,25	3,50	4,00	2,50	1,00	1,00	.	.
Hlavní refinanční sazba Fed (konec roku)	1,00	2,25	4,25	5,25	4,25	0,25	0,25	0,25	.	.
PRIBOR 3M ¹⁾	2,28	2,36	2,01	2,30	3,09	4,04	2,19	1,31	1,2	1,0
Výnos do doby splatnosti státních dluhopisů pro konvergenční účely ²⁾ 10R	4,12	4,75	3,51	3,78	4,28	4,55	4,67	3,71	3,7	3,7
Úrokové sazby z úvěrů nefinančním podnikům	4,57	4,51	4,27	4,29	4,85	5,59	4,58	4,10	3,9	3,9
Úrokové sazby z vkladů domácností	1,40	1,33	1,24	1,22	1,29	1,54	1,37	1,25	1,2	1,2
Reálné sazby z úvěrů nefinančním podnikům ³⁾	3,72	0,47	3,38	2,95	1,22	2,33	3,97	3,52	2,2	1,3
Čisté reálné sazby z vkladů domácností s dohodnutou splatností ⁴⁾	0,18	-1,64	-1,13	-0,63	-4,10	-2,26	0,17	-1,21	-1,6	-1,3

¹⁾ 3měsíční sazba PRIBOR na mezibankovním trhu.

²⁾ Výnos 10letých státních dluhopisů pro konvergenční účely podle statistiky ČNB. Slouží k posouzení výše dlouhodobých úrokových sazeb podle Maastrichtských kritérií.

³⁾ Deflováno meziročním růstem deflátoru domácí poptávky ve 4. čtvrtletí.

⁴⁾ Deflováno růstem spotřebitelských cen v průběhu roku, uvažována jednotná 15% daň z kapitálových výnosů.

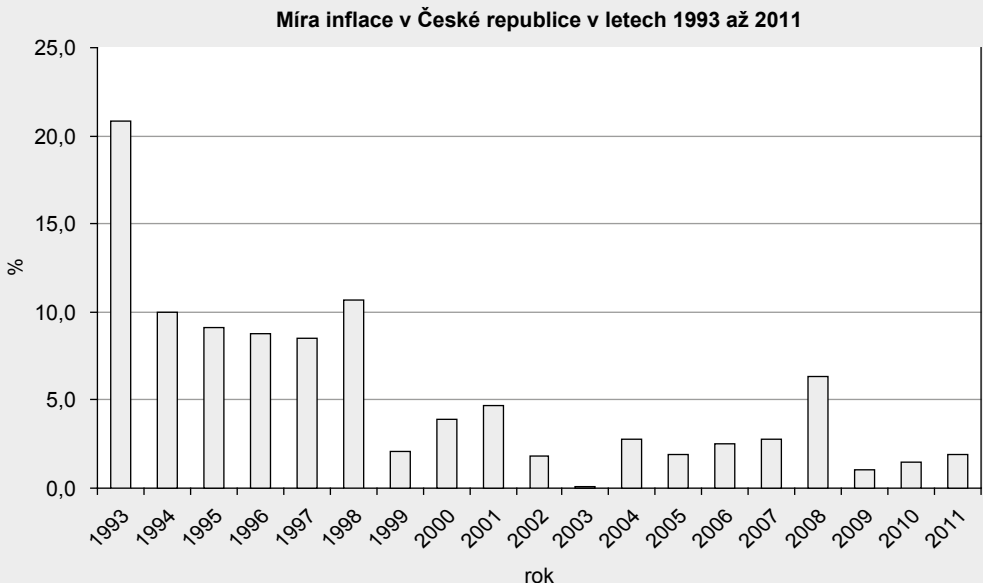
Obrázek 1.2 Čisté reálné úrokové sazby z vkladů domácností

Zdroj: MFČR

Příklad 1.5 Zdanění úroků a inflace v ČR

Jak již bylo zmíněno, v současné době jsou úroky z vkladů u fyzických osob nepodnikatelů zdaněny v ČR srážkovou daní ve výši 15 %, banka nám tedy připisuje úroky už po zdanění.

Inflace měřená indexem *CPI* se v uplynulých letech v ČR vyvíjela následujícím způsobem.



Zdroj: ČSÚ

1.5 Úrokové období

Zatím se ve všech předchozích příkladech počítalo s tím, že úroky jsou připisovány jednou ročně, ovšem často tomu tak není. Například u měsíčního termínovaného vkladu jsou úroky připisovány každý měsíc, v případě pololetního úrokového období pak každé pololetí atd. A právě určení a zohlednění frekvence připisování úroků je v rámci výpočtů ve finanční matematice prakticky to nejdůležitější, jelikož každý vzorec je koncipován na tzv. úrokové období (nebo také úrokovací období či období připisování úroků).

Úrokové období je jednoduše období, za které jsou připisovány úroky, resp. udává frekvenci úročení. Úrokovému období musí být v rámci daného vztahu přizpůsobeny veškeré proměnné, které jsou na něm závislé. A pokud jsou v jiném formátu, tak musí být do formátu úrokového období převedeny. To lze demonstrovat na nejjednodušším výpočtu ve finanční matematice, kterým je výpočet úroku, čemuž se bude věnovat následující podkapitola.



PARAMETRY PRODUKTU

- Spořicí účet vedený v CZK
- Minimální zůstatek libovolný
- Bez výpovědní lhůty
- Vyhlašováná úroková sazba s pásmovým úročením
- Čtvrtletní připisování úroků
- Platby inkasa a SIPO nejsou povoleny
- Vklady jsou pojištěny ze zákona
- Pod rodným číslem majitele účtu lze poskytnout pouze jeden Spořicí účet PRIMA

Obrázek 1.3 Úrokové období u spořicího účtu

Zdroj: UniCredit Bank

Úrokové období (období připisování úroků) obvykle zjistíme velmi jednoduše ze základních materiálů týkajících se daných produktů. Na obrázku 1.3 se u spořicího produktu jedná o čtvrtletní připisovací období. Úrokové období je tak čtvrtletí. Uvedený obrázek pochází ze základního informačního materiálu spořicího účtu.

1.6 Výpočet úroku

Úrok je kvantifikován dle vztahu 1.3 a je nutno připomenout, že jak u tohoto vztahu, tak i u jiného vztahu v rámci finanční matematiky je nejdůležitější nejprve určit frekvenci úročení neboli úrokové období a tomu poté přizpůsobit proměnné vstupující do daného vztahu. Ten je totiž koncipován právě na úrokové období.

$$U = K \cdot r \cdot t \quad (1.3)$$

kde: U = výše úroku v peněžních jednotkách,
 K = výše kapitálu,
 r = úroková sazba za úrokové období,
 t = počet úrokových období úročení kapitálu K .

Proměnná (r) tedy není automaticky roční úroková sazba (v relativním vyjádření), ale je to obecně úroková sazba za úrokové období. To znamená, že je-li úrokové období pololetní, jedná se o pololetní úrokovou sazbu, pokud by bylo úrokové období měsíční, jednalo by se o měsíční úrokovou sazbu atd. Jestliže bude aplikována daň z úrokových příjmů, bude rovněž nutno uvažovat čistou úrokovou sazbu za úrokové období.

Proměnná (t) neznamená automaticky počet roků, ale je to obecně počet úrokových období úročení kapitálu. Pokud bude úrokové období zrovna roční, bude se jednat o počet roků, ale pokud bude úrokové období pololetní, bude se jednat o počet pololetí atd.

Aplikaci vlivu úrokového období na hodnotu proměnných ve vzorci pro výpočet úroku demonstduje příklad 1.6.

Příklad 1.6 Výpočet úroku

Na účet se čtvrtletním úrokovým obdobím a s úrokovou sazbou 4 % p. a. bylo uloženo 1 000 Kč. Jaký úrok připiše banka za 3 měsíce na účet? Sazba daně z úrokových příjmů činí 15 %.

Řešení:

Úrokové období je čtvrtletní, což je pro nás důležitá informace, jelikož úrokovému formátu musí být přizpůsobeny všechny na něm závislé proměnné vstupující do daného vztahu. To znamená, že proměnná (r) musí být čtvrtletní úroková sazba a kvůli aplikaci zdanění se musí jednat o čistou úrokovou sazbu a proměnná (t) musí být počet čtvrtletí úročení kapitálu 1 000 Kč.

úrokové období = čtvrtletí

$r = 4 \% \text{ p. a.} \Rightarrow 1 \% \text{ p. q.} \Rightarrow \text{vliv zdanění} \Rightarrow 0,01 \cdot (1 - 0,15) \Rightarrow 0,85 \% \text{ p. q.} \Rightarrow 0,0085$

3 měsíce $\Rightarrow$ 1 čtvrtletí $\Rightarrow t = 1$

$$U = K \cdot r \cdot t$$

$$U = 1\,000 \cdot 0,0085 \cdot 1 = 8,50 \text{ Kč}$$

Odpověď: Banka připiše na účet úrok ve výši **8,50 Kč**.

Pochopení významu úrokového období a jeho vlivu na hodnotu proměnných vstupujících do vztahů finanční matematiky je naprosto klíčové.

1.7 Typy úročení

Úročení představuje způsob započítávání úroků. Obecně existují dva základní typy úročení:

- a) jednoduché úročení,
- b) složené úročení.

U jednoduchého úročení dochází stále pouze k úročení původního kapitálu, to znamená, že nedochází k úročení připsaných úroků z předchozích úrokových období. Je zde využito aritmetické posloupnosti. Naproti tomu u složeného úročení se kromě původního kapitálu úročí i úroky připsané za předchozí úroková období, a dochází tím i k připsování úroků z úroků. Složené úročení využívá geometrické posloupnosti.