

JOSEF ARLT, MARKÉTA ARLTOVÁ

EKONOMICKÉ ČASOVÉ ŘADY



VLASTNOSTI, METODY MODELOVÁNÍ, PŘÍKLADY A APLIKACE

Upozornění pro čtenáře a uživatele této knihy

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této tištěné či elektronické knihy nesmí být reprodukována a šířena v papírové, elektronické či jiné podobě bez předchozího písemného souhlasu nakladatele. Neoprávněné užití této knihy bude **trestně stíháno**.

Používání elektronické verze knihy je umožněno jen osobě, která ji legálně nabyla a jen pro její osobní a vnitřní potřeby v rozsahu stanoveném autorským zákonem. Elektronická kniha je datový soubor, který lze užívat pouze v takové formě, v jaké jej lze stáhnout s portálu. Jakékoliv neoprávněné užití elektronické knihy nebo její části, spočívající např. v kopírování, úpravách, prodeji, pronajímání, půjčování, sdělování veřejnosti nebo jakémkoliv druhu obchodování nebo neobchodního šíření je zakázáno! Zejména je zakázána jakákoliv konverze datového souboru nebo extrakce části nebo celého textu, umisťování textu na servery, ze kterých je možno tento soubor dále stahovat, přitom není rozhodující, kdo takovéto sdílení umožnil. Je zakázáno sdělování údajů o uživatelském účtu jiným osobám, zasahování do technických prostředků, které chrání elektronickou knihu, případně omezují rozsah jejího užití. Uživatel také není oprávněn jakkoliv testovat, zkoušet či obcházet technické zabezpečení elektronické knihy.



Copyright © Grada Publishing, a.s.



Copyright © Grada Publishing, a.s.

doc. Ing. Josef Arlt, CSc.
Ing. Markéta Arltová, Ph.D.

Ekonomické časové řady

Vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace

Vydala Grada Publishing, a.s.
U Průhonu 22, 170 00 Praha 7
tel.: +420 220 386 401, fax: +420 220 386 400
www.grada.cz
jako svou 2737. publikaci

Odpovědný redaktor Mgr. Petr Mušálek
Sazba Milan Vokál
Počet stran 288
První vydání, Praha 2007
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a. s.
Husova ulice 1881, Havlíčkův Brod

Kniha byla napsána a vydána za finanční podpory grantového projektu GAČR 402/04/0866.

© Grada Publishing, a.s., 2007
Cover Photo © profimedia.cz

ISBN 978-80-247-1319-9 (tištěná verze)
ISBN 978-80-247-6360-6 (elektronická verze ve formátu PDF)
© Grada Publishing, a.s. 2011

Obsah

O autorech	9
Předmluva	11
1. Ekonomické časové řady a jejich vlastnosti	13
1.1 Trend	15
1.2 Sezonnost	17
1.3 Nelinearita	20
1.4 Podmíněná heteroskedasticita	21
1.5 Společné vlastnosti časových řad	22
2. Lineární modely	25
2.1 Modely stacionárních časových řad	26
2.1.1 Stochastický proces a jeho stacionarita	26
2.1.2 Lineární proces	30
2.1.3 Autoregresní procesy [AR]	31
2.1.4 Procesy klouzavých průměrů [MA]	35
2.1.5 Smíšené procesy [ARMA]	36
2.2 Modely nestacionárních časových řad	38
2.2.1 Proces náhodné procházky („Random Walk Process“)	38
2.2.2 Procesy ARIMA	41
2.3 Modely sezonních časových řad	42
2.3.1 Sezonní autoregresní procesy [SAR]	42
2.3.2 Sezonní procesy klouzavých průměrů [SMA]	43
2.3.3 Smíšené sezonní a nesezonní procesy [SARMA]	43
2.3.4 Modely sezonních integrovaných časových řad [SARIMA]	44
2.4 Modely časových řad s dlouhou pamětí	46
2.4.1 Frakcionálně integrované procesy (FI)	46
2.4.2 Procesy ARFIMA	48
2.5 Konstrukce předpovědí na základě modelů ARIMA a ARFIMA	49
2.5.1 Předpovědi s minimální střední čtvercovou chybou na základě modelů ARIMA	49
2.5.2 Předpovědi s minimální střední čtvercovou chybou na základě modelů ARFIMA	51
2.5.3 Výpočet předpovědí	52
2.6 Výstavba lineárních modelů	54
2.6.1 Odhad parametrů modelů ARIMA	54

2.6.2	Odhad parametrů modelů FI a ARFIMA	56
2.6.3	Konstrukce předpovědi na základě odhadnutého modelu ARIMA a ARFIMA	59
2.6.4	Určení a ověřování řádu diferencování	59
2.6.5	Určení řádu polynomů $\phi_p(B)$ a $\theta_q(B)$	65
2.6.6	Diagnostická kontrola modelu	66
2.6.7	Kritéria pro volbu modelu	68
2.7	Praktické příklady	69
2.8	Shrnutí	92
3.	Modely s proměnlivými režimy	95
3.1	Modely s režimy určenými pozorovatelnými veličinami	96
3.1.1	Modely SETAR („Self-Exciting Threshold Autoregressive“)	96
3.1.2	Modely STAR („Smooth Transition Autoregressive“)	99
3.2	Modely s režimy určenými nepozorovatelnými veličinami	103
3.2.1	Model MSW („Markov-Switching“)	103
3.3	Konstrukce předpovědi na základě modelů s proměnlivými režimy	104
3.3.1	Bodové předpovědi	104
3.3.2	Intervalové předpovědi	105
3.3.3	Přesnost předpovědi konstruovaných na základě nelineárních modelů	106
3.4	Výstavba modelů s proměnlivými režimy	106
3.4.1	Odhady parametrů	107
3.4.2	Konstrukce předpovědi na základě odhadnutých modelů	112
3.4.3	Určení řádu zpoždění	113
3.4.4	Testování proměnlivosti režimů modelu a diagnostická kontrola	114
3.5	Praktické příklady	114
3.6	Shrnutí	124
4.	Modely volatility	125
4.1	Základní reprezentace	126
4.2	Lineární modely volatility	128
4.2.1	Modely ARCH („Autoregressive Conditional Heteroscedasticity“)	128
4.2.2	Modely GARCH („Generalized ARCH“)	129
4.2.3	Modely IGARCH („Integrated GARCH“)	132
4.2.4	Modely FIGARCH („Fractionally IGARCH“)	133
4.2.5	Modely GARCH-M („GARCH in mean“)	133
4.3	Nelineární modely volatility	134
4.3.1	Modely EGARCH („Exponential GARCH“)	135
4.3.2	Modely IEGARCH („Integrated EGARCH“) a FIEGARCH („Fractionally IEGARCH“)	136
4.3.3	Modely GJR-GARCH („Glosten, Jagannathan, Runkle GARCH“)	137
4.3.4	Modely STGARCH („Smooth Transition GARCH“)	138
4.4	Modely volatility a podmínka pravděpodobnostního rozdělení veličiny e_t	139
4.5	Konstrukce předpovědi na základě modelů volatility	139
4.5.1	Předpovědi na základě modelů ARIMA za předpokladu podmíněné heteroskedasticity	139
4.5.2	Výpočet předpovědi podmíněného rozptylu na základě lineárních modelů volatility	140

4.5.3	Výpočet předpovědí podmíněného rozptylu na základě nelineárních modelů volatility	143
4.6	Výstavba modelů volatility	143
4.6.1	Testování podmíněné heteroskedasticity v časových řadách	144
4.6.2	Odhad parametrů	146
4.6.3	Konstrukce předpovědí na základě odhadnutých modelů	149
4.6.4	Diagnostická kontrola	149
4.7	Praktické příklady	150
4.8	Shrnutí	159
5.	Lineární modely vícerozměrných stacionárních časových řad	161
5.1	Modely vícerozměrných stacionárních časových řad	162
5.1.1	Vektorový stochastický proces a jeho stacionarita	162
5.1.2	Vícerozměrný lineární proces	166
5.1.3	Vektorové autoregresní procesy	167
5.1.4	Vektorové procesy klouzavých průměrů	169
5.1.5	Směšené vektorové procesy	170
5.1.6	Problém identifikace	171
5.2	Kauzalita v časových řadách a analýza „Impuls-Reakce“ (I-R)	173
5.2.1	Definice Grangerovy kauzality	173
5.2.2	Grangerova kauzalita a model VAR	174
5.2.3	Analýza „Impuls-Reakce“	175
5.2.4	Problémy spjaté s analýzou „Impuls-Reakce“	179
5.3	Systémy dynamických simultánních rovnic (SDSR)	179
5.3.1	Endogenita, striktní exogenita a predeterminovanost v modelu časových řad	179
5.3.2	Strukturní, redukovaný a konečný tvar	181
5.3.3	Exogenita slabá, silná a super	183
5.4	Konstrukce předpovědí na základě modelu VARMA a SDSR	190
5.4.1	Předpovědi s minimální střední čtvercovou chybou	190
5.4.2	Výpočet předpovědí na základě modelu VARMA	192
5.4.3	Výpočet předpovědí na základě redukované formy systému rovnic	193
5.5	Výstavba modelů VAR, VARMA a SDSR, testování kauzality a exogenity	195
5.5.1	Odhady parametrů modelu VAR a VARMA	195
5.5.2	Určení řádu modelu VAR a VARMA	198
5.5.3	Diagnostická kontrola modelu VAR a VARMA	199
5.5.4	Kritéria pro volbu řádu modelu VAR	201
5.5.5	Testování Grangerovy kauzality	201
5.5.6	Testování exogenity	203
5.5.7	Odhady parametrů systému dynamických simultánních rovnic	205
5.5.8	Specifikace a diagnostická kontrola systému dynamických simultánních rovnic	206
5.5.9	Konstrukce předpovědí na základě modelů s odhadnutými parametry	211
5.6	Praktické příklady	212
5.7	Shrnutí	227

6. Lineární modely vícerozměrných nestacionárních časových řad	229
6.1 Modely vícerozměrných nestacionárních časových řad	230
6.1.1 Kointegrované procesy	230
6.1.2 Kointegrace v procesu VAR	232
6.1.3 Grangerova kauzalita a analýza „Impuls-Reakce“ v integrovaných a kointegrovaných systémech	235
6.1.4 Slabá a silná exogenita v kointegrovaném systému	236
6.1.5 Kointegrace v jednorovnicových modelech	238
6.2 Konstrukce předpovědí v integrovaných a kointegrovaných systémech . . .	239
6.3 Výstavba modelů EC	240
6.3.1 Odhady parametrů modelu EC	240
6.3.2 Testování řádu kointegrace	242
6.3.3 Testy hypotéz o parametrech β , γ	243
6.3.4 Identifikující omezení dlouhodobých vztahů	247
6.3.5 Testy kointegrace a odhady parametrů v jednorovnicových modelech	251
6.4 Praktické příklady	251
6.5 Shrnutí	265
Literatura	267
Rejstřík	283

O autorech

Doc. Ing. Josef Arlt, CSc. (*1962)

Vystudoval obor ekonomická statistika na Vysoké škole ekonomické v Praze. V současnosti působí jako docent na katedře statistiky a pravděpodobnosti VŠE v Praze. Odborně se specializuje především na problémy analýzy ekonomických a finančních časových řad a ekonometrické analýzy časových řad.

Absolvoval studijní pobyty na špičkových zahraničních univerzitách – v Rakousku na Institute for Advanced Studies ve Vídni, v USA na Brown University, Texas A&M University a University of California San Diego.

V pedagogické oblasti se věnuje výuce předmětů zabývajících se analýzou ekonomických a finančních časových řad na VŠE v Praze, přednáší i na jiných vysokých školách, výzkumných pracovištích a institucích. Publikoval řadu učebních textů.

Je autorem knih „Moderní metody modelování ekonomických časových řad“, „Finanční časové řady“, autorem nebo spoluautorem řady výzkumných prací, publikuje v renomovaných domácích a zahraničních časopisech.

Další informace jsou dostupné na <http://nb.vse.cz/~arlt>.



Ing. Markéta Arltová, Ph.D. (*1970)

Vystudovala obor ekonomická statistika na Vysoké škole ekonomické v Praze. V doktorském studiu pokračovala v oboru statistika. V současnosti působí jako odborný asistent na katedře statistiky a pravděpodobnosti VŠE v Praze.

V pedagogické činnosti se specializuje na předměty spojené s analýzou ekonomických a finančních časových řad a se statistickým výpočetním prostředím. Je autorkou knihy „Finanční časové řady“ a mnoha vysokoškolských skript.

Ve vědecko-výzkumné činnosti se věnuje problematice modelování ekonomických a finančních časových řad. Výsledky vědecko-výzkumné činnosti publikuje v domácích i zahraničních časopisech.

Další informace jsou dostupné na <http://nb.vse.cz/~arltova>.



Předmluva

V současnosti se nacházíme v období, kdy není možné provádět důležitá ekonomická rozhodnutí bez důkladné analýzy základních ekonomických ukazatelů a jejich vztahů. Při řídicí činnosti na různých úrovních hrají důležitou roli statisticko-ekonometrické modely charakterizující základní rysy vývoje hospodářství nebo jeho různých sfér. V posledních letech vzniklo v oblasti analýzy ekonomických časových řad mnoho nových metod a přístupů. Také podmínky pro jejich praktickou aplikaci se u nás v posledních letech výrazně zlepšili, což je způsobeno jednak relativně snadnou dostupností poměrně širokého spektra druhů kvalitního softwaru a jednak rostoucí délkou analyzovaných časových řad.

Předkládaná kniha se zabývá základními teoretickými a praktickými aspekty modelování ekonomických a finančních časových řad. Její význam spočívá v objasnění principů v praxi velice často používaných lineárních a nelineárních modelů jednorozměrných i vícerozměrných ekonomických časových řad a v popisu procesu výstavby těchto modelů a jejich praktické aplikace.

K sepsání této knihy nám pomohly zejména znalosti z vědecko-výzkumné činnosti v oblasti analýzy ekonomických časových řad a zkušenosti získané praktickým používáním těchto metod. Značným přínosem byly rovněž zkušenosti, které jsme získali výukou předmětů se zaměřením na metody analýzy ekonomických časových řad a vedením kurzů s obdobným zaměřením pro pracovníky ekonomické praxe.

Kniha je určena studentům ekonomických oborů a pracovníkům hospodářské praxe, kteří mají znalosti základních principů statistiky a pravděpodobnosti a zkušenosti s prací se statistickým a ekonometrickým softwarem.

Skládá se ze šesti kapitol. První kapitola se zabývá popisem ekonomických časových řad a jejich charakteristickými vlastnostmi. Druhá kapitola formuluje základní lineární modely stacionárních, nestacionárních a sezonních časových řad. Třetí kapitola obsahuje formulaci modelů s proměnlivými režimy, tj. skupiny nelineárních modelů úrovně časových řad. Čtvrtá kapitola se zabývá lineárními a nelineárními modely volatility časových řad. Výše uvedené kapitoly lze na jedné straně chápat jako relativně uzavřený celek, jehož význam spočívá jednak ve vysvětlení základních pojmů z oblasti stochastického modelování časových řad a jednak v přiblížení postupů při výstavbě a aplikaci modelů konkrétních časových řad. Na druhé straně je lze chápat jako přípravnou část pro pochopení obsahu páté a šesté kapitoly, které se zabývají modelováním vícerozměrných časových řad. Pátá kapitola formuluje modely třídy VAR, VMA a VARMA pro modelování stacionárních vícerozměrných časových řad. Je zde objasněna rovněž problematika kauzality v časových řadách. Dalším významným tématem

této kapitoly jsou systémy dynamických simultánních rovnic. Poslední šestá kapitola se zabývá problematikou kointegrace časových řad a formulací modelů typu EC.

Struktura všech kapitol je stejná, nejprve je teoreticky objasněn model, poté je popsána problematika jeho výstavby. Velmi důležitou součástí kapitol jsou příklady¹⁾ resp. studie uvedené na konci. V rámci těchto studií jsou rovněž detailně popsány výpočetní aspekty problému. Pro většinu výpočtů byl využit software GiveWin2, některé výpočty byly provedeny s pomocí softwaru TSM.

Na závěr bychom rádi poděkovali ing. Petru Novákovi za pečlivé přečtení textu.

Kniha byla napsána a vydána za finanční podpory grantového projektu GAČR 402/04/0866.

Autoři

¹ Data použitá v Praktických příkladech na koncích kapitol lze nalézt na <http://nb.vse.cz/~arlt> nebo na <http://nb.vse.cz/~arltova>.

KAPITOLA 1

Ekonomické časové řady a jejich vlastnosti

Důležitým úkolem statistických analýz ekonomických jevů je zkoumání jejich dynamiky. Empirická pozorování v ekonomické oblasti jsou často uspořádána do časové řady.

Ekonomickou časovou řadou se rozumí řada hodnot jistého věcně a prostorově vymezeného ekonomického ukazatele, která je uspořádána v čase směrem od minulosti do přítomnosti.

Ekonomické časové řady lze klasifikovat podle typu ukazatele, který se sleduje, na intervalové a okamžikové. *Intervalové časové řady* jsou řadami ukazatelů, jejichž hodnoty závisí na délce časového intervalu sledování. Typickými intervalovými ukazateli jsou extenzitní ukazatele, jejich příkladem může být objem výroby, spotřeba surovin atd. *Okamžikové časové řady* jsou řadami ukazatelů, jejichž hodnoty se vztahují k jistým časovým okamžikům. Hodnoty takových ukazatelů nezávisí na délce časového intervalu sledování. Příkladem okamžikového ukazatele je počet neumístěných uchazečů o zaměstnání evidovaných na úřadech práce k určitému datu.

Klasifikaci ekonomických časových řad lze provést také podle délky intervalu sledování hodnot. *Dlouhodobé časové řady* mají hodnoty sledované v ročních či delších časových úsecích, hodnoty *krátkodobých časových řad* se sledují v úsecích kratších, než je jeden rok, a *vysokofrekvenční časové řady* mají hodnoty sledované v úsecích kratších, než je jeden týden.

Lze pozorovat, že zejména s druhou klasifikací souvisí tvar ekonomických časových řad, např. čím je interval sledování delší, tím jsou časové řady vyhlazenější. Tato skutečnost však vyplývá z typického rysu časových řad – časové „svázanosti“ jejich jednotlivých hodnot. Na rozdíl od průřezových dat, má u časových řad pořadí hodnot klíčový význam. Způsob, jakým na sebe jednotlivé hodnoty v časových řadách navazují, určuje jejich tvar a charakteristické vlastnosti.

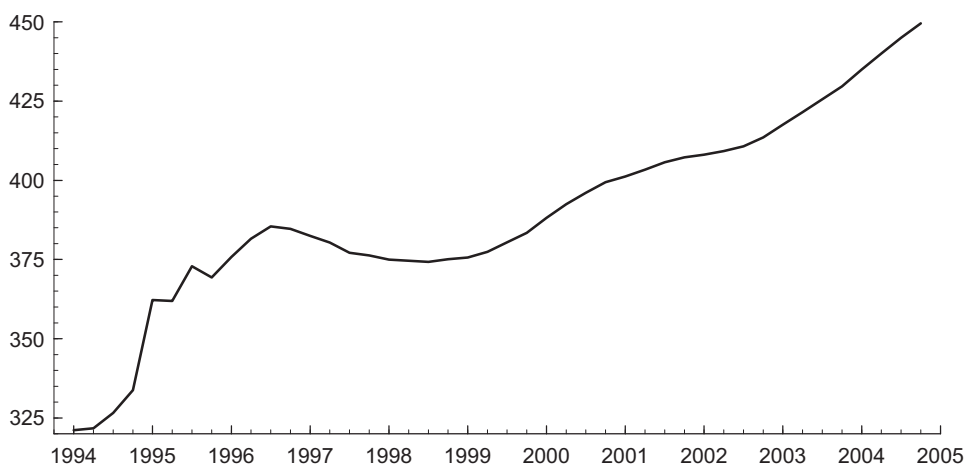
Ekonomické časové řady jsou charakteristické: a) trendem, b) sezonností, c) podmíněnou heteroskedasticitou, d) nelinearitou a e) společnými vlastnostmi více časových řad, např. tzv. společným trendem. Tyto vlastnosti se u časových řad neobjevují zpravidla najednou. Jejich přítomnost závisí na typu časové řady, např. sezonnost se objevuje u krátkodobých časových řad, podmíněná heteroskedasticita u vysokofrekvenčních časových řad.

Obsahem této kapitoly je stručný popis uvedených vlastností. Budou přitom použity grafická analýza, míry dynamiky a některé jednoduché prostředky klasické analýzy časových řad, zejména tzv. trendová analýza a regresní metoda modelování sezonní složky. Tento popis časových řad není vyčerpávající a je ho třeba chápat pouze jako ilustraci výše zmíněných vlastností sloužících k předběžné analýze. Sofistikovanější metody analýzy ekonomických časových řad a jejich použití jsou obsahem následujících kapitol.

V empirických analýzách se někdy ekonomické časové řady logaritmicky transformují. Důvodů pro tuto transformaci je několik. Některé ekonomické časové řady jsou charakteristické exponenciálně se vyvíjejícím trendem a logaritmická transformace znamená jeho linearizaci. Touto transformací se současně časová řada stabilizuje z hlediska variability. V případě finančních časových řad, tj. časových řad cen a jejich funkcí, se vychází z předpokladu, že cena nemůže být záporné číslo, předpokládá se tedy, že by hodnoty těchto časových řad mohly být generovány logaritmicko-normálním rozdělením. Jak je známo, logaritmus náhodné veličiny s logaritmicko-normálním rozdělením má rozdělení normální. Při konstrukci ekonometrických modelů se často vychází z teoretických ekonomických modelů, které jsou v exponenciálním tvaru. Jejich linearizace se dosáhne logaritmováním, do lineárního modelu tedy musí vstoupit logaritmicky transformované časové řady.

1.1 Trend

Trend odráží dlouhodobé změny v průměrném chování časové řady, resp. obecnou tendenci vývoje zkoumaného jevu za dlouhé období. Je výsledkem faktorů, které dlouhodobě působí ve stejném směru, jako je např. technologie výroby, demografické podmínky či podmínky trhu v dané oblasti. Trend může mít různý charakter, může být rostoucí, klesající, strmý, mírný, v průběhu času se může měnit, takže jej lze pokládat spíše za cyklus. Může být hladší než je vlastní časová řada, nebo také variabilnější. Trend v ekonomické časové řadě lze ilustrovat obr. 1.1, kde je zachycen sezonně očištěný HDP České republiky od 1. čtvrtletí roku 1994 do 4. čtvrtletí roku 2004.



Obr. 1.1 Sezonně očištěný hrubý domácí produkt ČR (stálé ceny roku 1995) v mld. Kč

Vývoj této časové řady je zajímavý, neboť její trend se v průběhu času mění. Do druhého čtvrtletí roku 1996 je vidět prudký růst, od třetího čtvrtletí 1996 do prvního čtvrtletí 1998 je trend klesající a poté opět roste, i když již ne tak prudce jako v prvním období.

Jednou z možností, jak lze trend kvantifikovat, je model

$$X_t = \alpha + \beta t + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (1.1)$$

který se označuje jako model lineárního deterministického trendu. Parametr β charakterizuje přírůstek řady X_t při změně času t o jednotku. V tab. 1.1 jsou uvedeny odhady jeho parametrů metodou nejmenších čtverců pro jednotlivá období a odhady jejich směrodatných chyb. Odhady parametru β potvrzují výše uvedenou dynamiku časové řady, odhady směrodatných chyb jsou podhodnocené, protože složka u_t vykazuje ve všech třech obdobích korelaci v čase (tzv. autokorelaci).

Dynamiku HDP v uvedených obdobích lze kvantifikovat také pomocí tzv. měř dynamiky. *Absolutní přírůstek* (první difference) je definován jako

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} \quad t = 2, 3, \dots, T, \quad (1.2)$$

a udává, jak se změnila hodnota v časové řadě v čase t ve srovnání s hodnotou v čase $t - 1$. Odečte-li se model lineárního trendu v čase $t - 1$, tj.

$$X_{t-1} = \alpha + \beta(t-1) + u_{t-1} \quad (1.3)$$

od rovnice (1.1), získá se model ve tvaru

$$X_t - X_{t-1} = \beta + e_t, \quad t = 2, 3, \dots, T, \text{ kde } e_t = (u_t - u_{t-1}). \quad (1.4)$$

Odhad parametru β se získá metodou nejmenších čtverců a má formu aritmetického průměru prvních diferencí (1.2). Je interpretován také jako *průměrná difference* (nebo *průměrný absolutní přírůstek*). Odhady parametru β , jakož i odhady jeho směrodatných chyb pro jednotlivá období, jsou uvedeny v tab. 1.1. Rovněž tyto odhady (kromě období I/1994 až III/1996), potvrzují výše uvedenou dynamiku HDP. Protože složka e_t vykazuje slabší autokorelaci než u_t , odhady směrodatných chyb modelu (1.4) jsou výrazně vyšší než v případě modelu (1.1). Z tohoto důvodu je model (1.4) vhodnější pro zachycení dynamiky než model (1.1).

Za předpokladu, že model trendu je exponenciální ve tvaru

$$X_t = \gamma \delta^t \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (1.5)$$

potom by bylo možné k jeho linearizaci použít logaritmickou transformaci, tj.

$$\ln X_t = \ln \gamma + \ln \delta \cdot t + \ln \varepsilon_t. \quad (1.6)$$

Parametr $\ln \delta$ charakterizuje přírůstek řady $\ln X_t$ při změně času t o jednotku. V tab. 1.1 jsou uvedeny jeho odhady pro jednotlivá období metodou nejmenších čtverců a odhady směrodatných chyb.

Čtvrtou možností, jak charakterizovat dynamiku HDP, jsou koeficienty růstu a relativní přírůstky. *Koeficient růstu* je definován jako

$$k_t = \frac{X_t}{X_{t-1}}, \quad t = 2, 3, \dots, T, \quad (1.7)$$

a po vynásobení stem říká na kolik % hodnoty v čase $t-1$ se změnila hodnota v čase t . V případě exponenciálního trendu časové řady je možné model (1.5) v čase $t-1$ vyjádřit ve tvaru

$$X_{t-1} = \gamma \delta^{t-1} \varepsilon_{t-1}. \quad (1.8)$$

Vydělením rovnice (1.5) rovnicí (1.8) se získá model

$$\frac{X_t}{X_{t-1}} = \delta \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_{t-1}}, \quad t = 2, 3, \dots, T, \quad (1.9)$$

po linearizaci logaritmickou transformací má tento model formu

$$\ln X_t - \ln X_{t-1} = \ln \delta + \xi_t, \quad t = 2, 3, \dots, T, \text{ kde } \xi_t = (\ln \varepsilon_t - \ln \varepsilon_{t-1}). \quad (1.10)$$

Odhad parametru $\ln \delta$ se získá metodou nejmenších čtverců a má formu aritmetického průměru prvních diferencí logaritmů časové řady. Odhady parametru pro jednotlivá období a odhady směrodatných chyb jsou uvedeny v tab. 1.1. Po odlogaritmování se tento odhad interpretuje jako *průměrný koeficient růstu* a jedná se o geometrický průměr koeficientů růstu (1.7). Důležitou mírou dynamiky je *relativní přírůstek* definovaný jako

$$\delta_t = \frac{\Delta X_t}{X_{t-1}} = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} = \frac{X_t}{X_{t-1}} - 1, \quad t = 2, 3, \dots, T. \quad (1.11)$$

Po vynásobení stem říká o kolik % hodnoty v čase $t - 1$ se změnila hodnota v čase t . Průměrný relativní přírůstek se získá, když se od průměrného koeficientu růstu odečte jednička. Mezi logaritmem koeficientu růstu a relativním přírůstkem existuje v případě malých relativních přírůstků vztah

$$\ln(X_t/X_{t-1}) = \ln[1 + (X_t - X_{t-1})/X_{t-1}] \approx (X_t - X_{t-1})/X_{t-1}. \quad (1.12)$$

Tab. 1.1

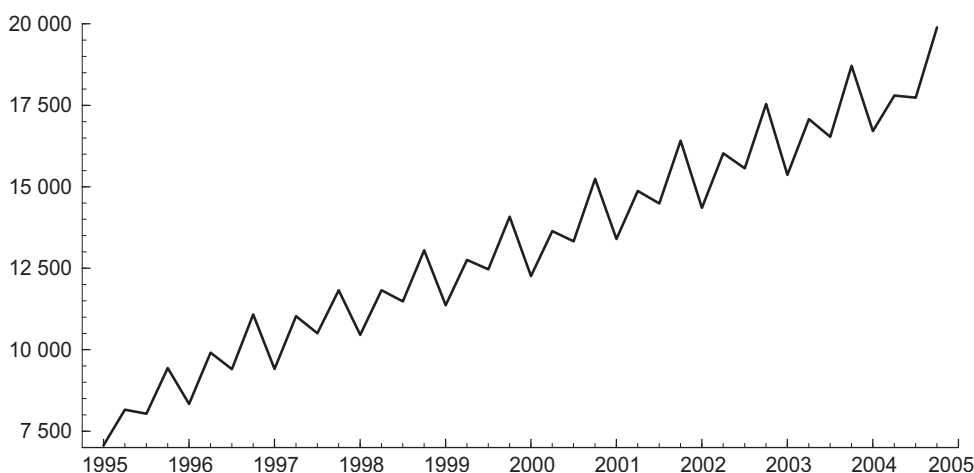
Období	$\hat{\beta}$ z (1.1)	$\hat{\beta}$ z (1.4)	$\ln \hat{\delta}$ z (1.6)	$\ln \hat{\delta}$ z (1.10)
I/1994–IV/2004	2,19893 (0,1314)	2,98522 (0,7527)	0,00569 (0,00036)	0,00782 (0,00212)
II/1994–III/1996	7,17980 (0,7235)	6,42263 (2,7720)	0,02042 (0,00214)	0,01823 (0,00793)
IV /1996–III/1998	–1,53476 (0,1877)	–1,47971 (0,4101)	–0,00405 (0,00049)	–0,00389 (0,00108)
IV/1998–IV/2004	2,91337 (0,0938)	3,10350 (0,2935)	0,00713 (0,00021)	0,00755 (0,00068)

1.2 Sezonnost

Sezonnost se rozumí periodické kolísání v časové řadě, které má systematický charakter. Toto kolísání se odehrává během jednoho kalendářního roku a každý rok se ve stejné nebo modifikované podobě opakuje. Periodické změny jsou způsobeny především střídáním ročních období a různými institucionalizovanými lidskými zvyky.

Sezonnost může být přítomna u krátkodobých a u vysokofrekvenčních časových řad. Označí-li se počet sezon jako S , potom v případě čtvrtletní časové řady $S = 4$, v případě měsíční časové řady $S = 12$. Analyzují-li se denní finanční časové řady, potom $S = 5$, protože se obchoduje pouze v pracovních dnech.

U některých časových řad je sezonnost patrná z grafu na první pohled, u jiných tak zřejmá být nemusí. Poměrně výraznou sezonnost v ekonomické časové řadě lze ukázat na obr. 1.2, kde je zachycena čtvrtletní časová řada průměrné hrubé nominální mzdy v České republice od 1. čtvrtletí 1995 do 4. čtvrtletí 2004.



Obr. 1.2 Průměrná hrubá (nominální) mzda v ČR v Kč

Tato časová řada je charakteristická lineárním vývojem trendu a pravidelnou sezonností. Její průběh je možné zachytit modelem deterministického trendu a deterministické sezonnosti ve tvaru

$$X_t = \alpha + \beta t + \mu_2 D_{2,t} + \mu_3 D_{3,t} + \mu_4 D_{4,t} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (1.13)$$

kde $D_{j,t}$ je nula–jedničková sezonní pomocná proměnná, která nabývá jedničky, jestliže čas t ($t = 1, 2, \dots, T$) odpovídá j -tému období v roce ($j = 1, 2, \dots, S$), v jiném případě nabývá hodnotu nula. Parametry $\mu_j, j = 2, 3, 4$ charakterizují sezonní složku. Vzhledem k tomu, že model (1.13) obsahuje volný parametr α , nemůže obsahovat pomocnou proměnnou $D_{1,t}$, protože by vysvětlující proměnné tohoto modelu byly lineárně závislé.

V čase $t - 1$ lze model (1.13) vyjádřit ve formě

$$X_{t-1} = \alpha + \beta(t-1) + \mu_2 D_{2,t-1} + \mu_3 D_{3,t-1} + \mu_4 D_{4,t-1} + u_{t-1}. \quad (1.14)$$

Odečtením rovnice (1.14) od rovnice (1.13) se získá model ve tvaru

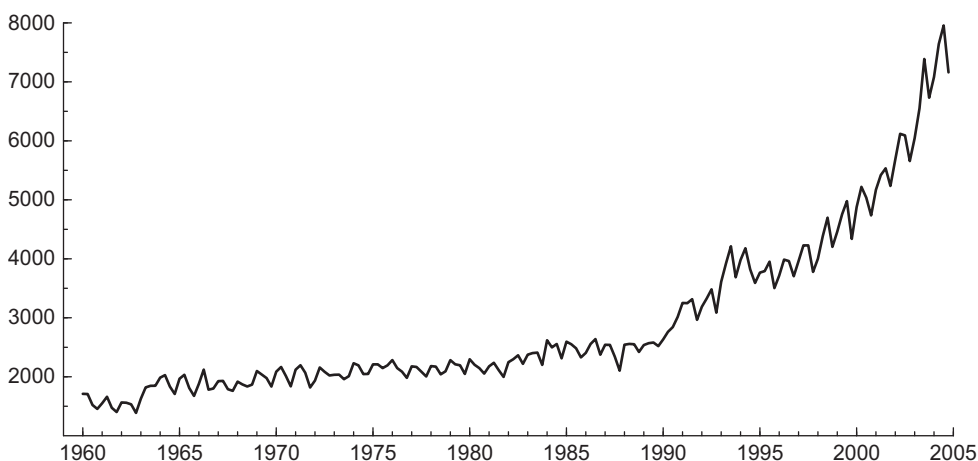
$$X_t - X_{t-1} = \beta + \mu_2(D_{2,t} - D_{2,t-1}) + \mu_3(D_{3,t} - D_{3,t-1}) + \mu_4(D_{4,t} - D_{4,t-1}) + e_t, \\ t = 2, 3, \dots, T, \quad \text{kde } e_t = (u_t - u_{t-1}). \quad (1.15)$$

Z modelu (1.15) je patrné, že první diferencí se odstraní z modelu trend, sezonní část však zůstává stejná jako v případě modelu (1.13). Parametry modelu (1.15) se odhadnou metodou nejmenších čtverců. Tato metoda nezaručuje, že součet parametrů charakterizujících sezonnost, tzv. sezonních faktorů, je nulový. Sezonní faktory, jejichž součet je roven nule, se získají jako

$$\hat{\mu}_1^* = -\bar{\mu}, \quad \hat{\mu}_2^* = \hat{\mu}_2 - \bar{\mu}, \quad \hat{\mu}_3^* = \hat{\mu}_3 - \bar{\mu}, \quad \hat{\mu}_4^* = \hat{\mu}_4 - \bar{\mu}, \quad \text{kde } \bar{\mu} = (\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_3 + \hat{\mu}_4) / 4.$$

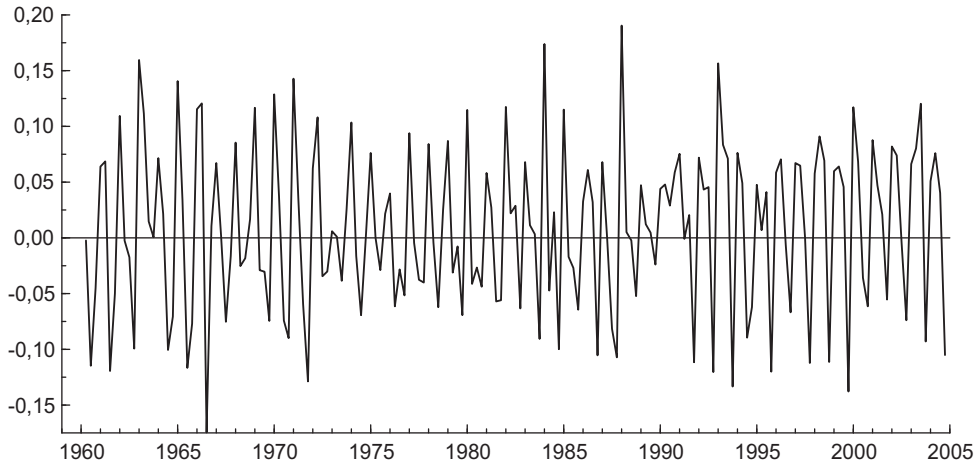
Sezonní faktory pro časovou řadu průměrné hrubé nominální mzdy jsou $\hat{\mu}_1^* = -928,2333$ (45,34675), $\hat{\mu}_2^* = 230,5222$ (44,37665), $\hat{\mu}_3^* = -399,0222$ (44,37665), $\hat{\mu}_4^* = 1096,7333$ (45,34675). Je tedy patrné, že v prvním a třetím čtvrtletí se průměrná mzda pohybuje pod úrovní trendu, zatímco ve druhém a čtvrtém čtvrtletí je nad jeho úrovní.

Sezonnost v časové řadě může mít také nepravidelný charakter. Příkladem je čtvrtletní časová řada počtu narozených dětí mimo manželství v České republice od 1. čtvrtletí 1960 do 4. čtvrtletí 2004. Průběh této časové řady je zachycen na obr. 1.3.



Obr. 1.3 Počet narozených dětí mimo manželství v ČR

Z obrázku je patrné, že trend této časové řady je zejména od roku 1990 exponenciálně rostoucí a s rostoucím trendem se zvětšují i sezonní výkyvy. Tuto časovou řadu by pro účely modelování bylo vhodné linearizovat logaritmickou transformací. Prvním diferencováním takto transformované časové řady se odstraní trend a zvýrazní se sezonnost viz obr. 1.4.



Obr. 1.4 Řada diferencí logaritmů

Logaritmickou transformací modelu trendu a sezonnosti časové řady počtu narozených dětí mimo manželství ve tvaru

$$X_t = \gamma \delta^t \omega_2^{D_{2,t}} \omega_3^{D_{3,t}} \omega_4^{D_{4,t}} \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (1.16)$$

se získá model

$$\ln X_t = \ln \gamma + \ln \delta t + \ln \omega_2 D_{2,t} + \ln \omega_3 D_{3,t} + \ln \omega_4 D_{4,t} + \ln \varepsilon_t, \quad (1.17)$$

po diferencování potom

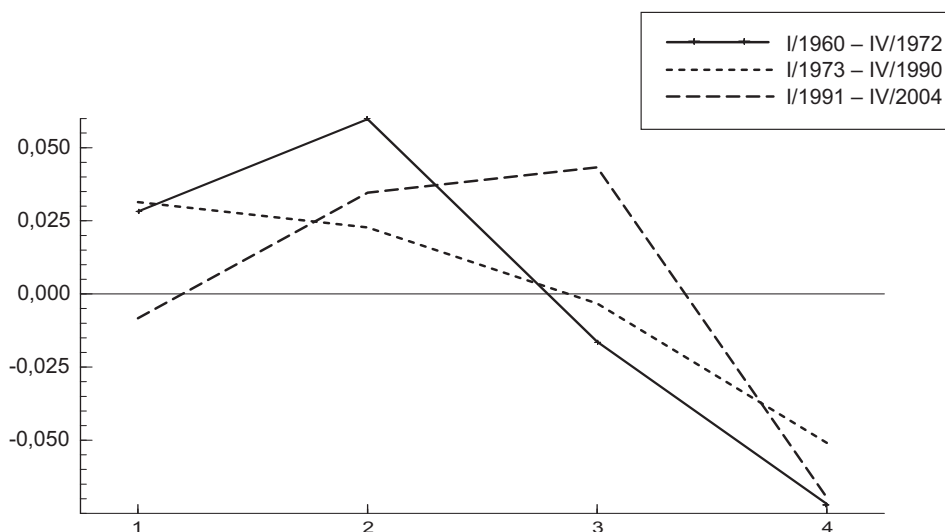
$$\ln X_t - \ln X_{t-1} = \ln \delta + \ln \omega_2 (D_{2,t} - D_{2,t-1}) + \ln \omega_3 (D_{3,t} - D_{3,t-1}) + \ln \omega_4 (D_{4,t} - D_{4,t-1}) + \xi_t, \\ t = 2, 3, \dots, T, \quad \text{kde } \xi_t = (\ln \varepsilon_t - \ln \varepsilon_{t-1}). \quad (1.18)$$

Parametry tohoto modelu se odhadnou metodou nejmenších čtverců. Sezonní faktory jejichž součet je roven nule jsou $\ln \hat{\omega}_1^* = -\ln \bar{\omega}$, $\ln \hat{\omega}_2^* = \ln \hat{\omega}_2 - \ln \bar{\omega}$, $\ln \hat{\omega}_3^* = \ln \hat{\omega}_3 - \ln \bar{\omega}$, $\ln \hat{\omega}_4^* = \ln \hat{\omega}_4 - \ln \bar{\omega}$, kde $\ln \bar{\omega} = (\ln \hat{\omega}_2 + \ln \hat{\omega}_3 + \ln \hat{\omega}_4) / 4$.

Z obr. 1.4 je patrné, že z hlediska proměnlivé sezonnosti by bylo možné časovou řadu rozdělit na tři úseky: I/1960–IV/1972, I/1973–IV/1990, I/1991–IV/2004. Sezonní faktory získané na základě modelu (1.18) obsahuje tab. 1.2 a jsou zachycené na obr. 1.5. Zejména z obr. 1.5 je zřetelně vidět, že charakter sezonnosti je v jednotlivých obdobích výrazně odlišný. Je velmi pravděpodobné, že změna sezonnosti souvisí s prudce rostoucím trendem analyzované časové řady.

Tab. 1.2 Sezonní faktory

	Období		
	I/1960–IV/1972	II/1973–IV/1990	II/1991–IV/2004
$\ln \hat{\omega}_1^*$	0,0282 (0,00709)	0,0314 (0,00527)	–0,0083 (0,00522)
$\ln \hat{\omega}_2^*$	0,0598 (0,00697)	0,0227 (0,00521)	0,0346 (0,00514)
$\ln \hat{\omega}_3^*$	–0,0163 (0,00697)	–0,0033 (0,00521)	0,0433 (0,00514)
$\ln \hat{\omega}_4^*$	–0,0718 (0,00709)	–0,0509 (0,00527)	–0,0696 (0,00522)



Obr. 1.5 Sezonní faktory

1.3 Nelinearita

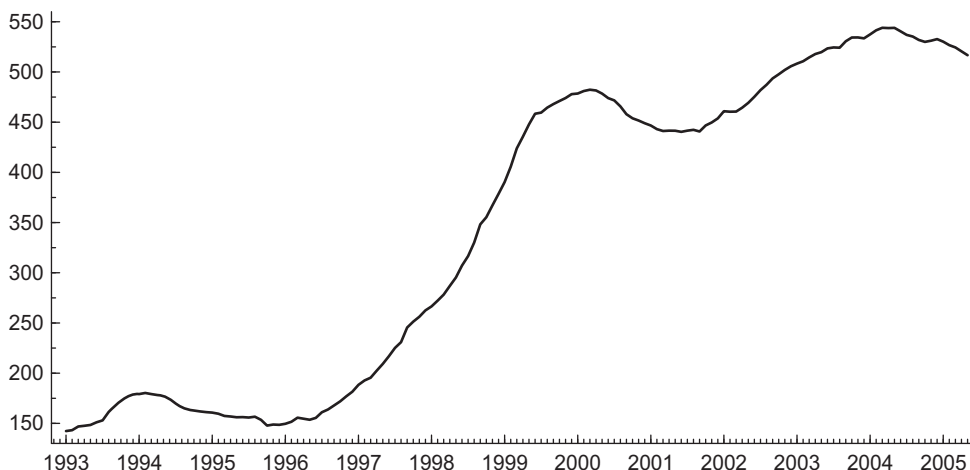
Problematika nelinearity je velmi široká a zdaleka ne prozkoumaná. Některé ekonomické časové řady jsou charakteristické strukturálními zlomy, změnami průběhu a variability. V této souvislosti se může v čase měnit i jejich autokorelační struktura (viz kap. 2). Tento způsob chování ekonomických časových řad nemůže být korektně zachycen lineárními modely.

Nelinearita se u makroekonomických časových řad může projevit odlišnými průměrnými diferencemi nebo průměrnými koeficienty růstu v různých obdobích. Příkladem může být časová řada počtu evidovaných nezaměstnaných v České republice od ledna 1993 do května 2005, která je zachycena na obr. 1.6.

V této časové řadě se střídají období růstu s obdobími stagnace a poklesu, její průběh může být charakterizován modelem

$$X_t - X_{t-1} = \beta_1 I(\text{růst}) + \beta_2 [1 - I(\text{růst})] + e_t, \quad t = 2, 3, \dots, T, \quad (1.19)$$

kde $I(\cdot)$ je indikátor, který nabývá jedničky v období růstu a jinak nuly. Odhady parametrů se získají metodou nejmenších čtverců. Odhad parametru β_1 je průměrná diference v obdobích růstu, odhad parametru β_2 je průměrná diference v obdobích stagnace nebo poklesu.



Obr. 1.6 Počet evidovaných nezaměstnaných v ČR v tis. osob (sezonně očištěno)

V analyzované časové řadě počtu evidovaných nezaměstnaných je průměrný absolutní přírůstek v obdobích růstu $\hat{\beta}_1 = 4,74574$ (0,3581) a v obdobích stagnace a poklesu $\hat{\beta}_2 = -2,08801$ (0,5169). Lze tedy nejen konstatovat, že období růstu počtu evidovaných nezaměstnaných jsou delší, ale rychlost růstu časové řady v těchto obdobích je více než dvojnásobná než rychlost poklesu v ostatních obdobích.

1.4 Podmíněná heteroskedasticita

Jedním ze základních předpokladů, ze kterého se v teoretických a empirických analýzách zabývajících se finančními časovými řadami, tj. časovými řadami odvozených z cen nebo charakterizující ceny, často vychází je, že logaritmy tzv. výnosů, tj. logaritmy koeficientů růstu, mají normální rozdělení s konstantní střední hodnotou a konstantním rozptylem v čase. Důvod pro logaritmování je zřejmý, ceny nemohou být záporné, takže se předpokládá jejich logaritmicko-normální rozdělení.

V praxi se velmi často ukazuje, že časové řady logaritmů výnosů mají rozdělení špičatější s „tlustšími“ konci ve srovnání s rozdělením normálním. To znamená, že četnost výskytu extrémně vysokých kladných či záporných hodnot je vyšší, než za předpokladu normality.

Uvedená vlastnost finančních časových řad je známá relativně dlouho, může být způsobena charakteristickým rysem jejich chování resp. chováním logaritmů jejich koeficientů růstu. Variabilita (volatilita) těchto časových řad se v průběhu času mění, období s vysokou variabilitou jsou střídána období s variabilitou nižší. Tato skutečnost je spojena s rostoucí a klesající nejistotou na trhu. Lze si představit, že logaritmus výnosu má normální rozdělení s rozptylem, který se mění v závislosti na čase. Tato vlastnost se označuje jako podmíněná heteroskedasticita. Nepodmíněné rozdělení logaritmů výnosů je potom směsicí normálních rozdělení, z nichž ta s malým podmíněným rozptylem koncentrují výnosy v blízkosti střední