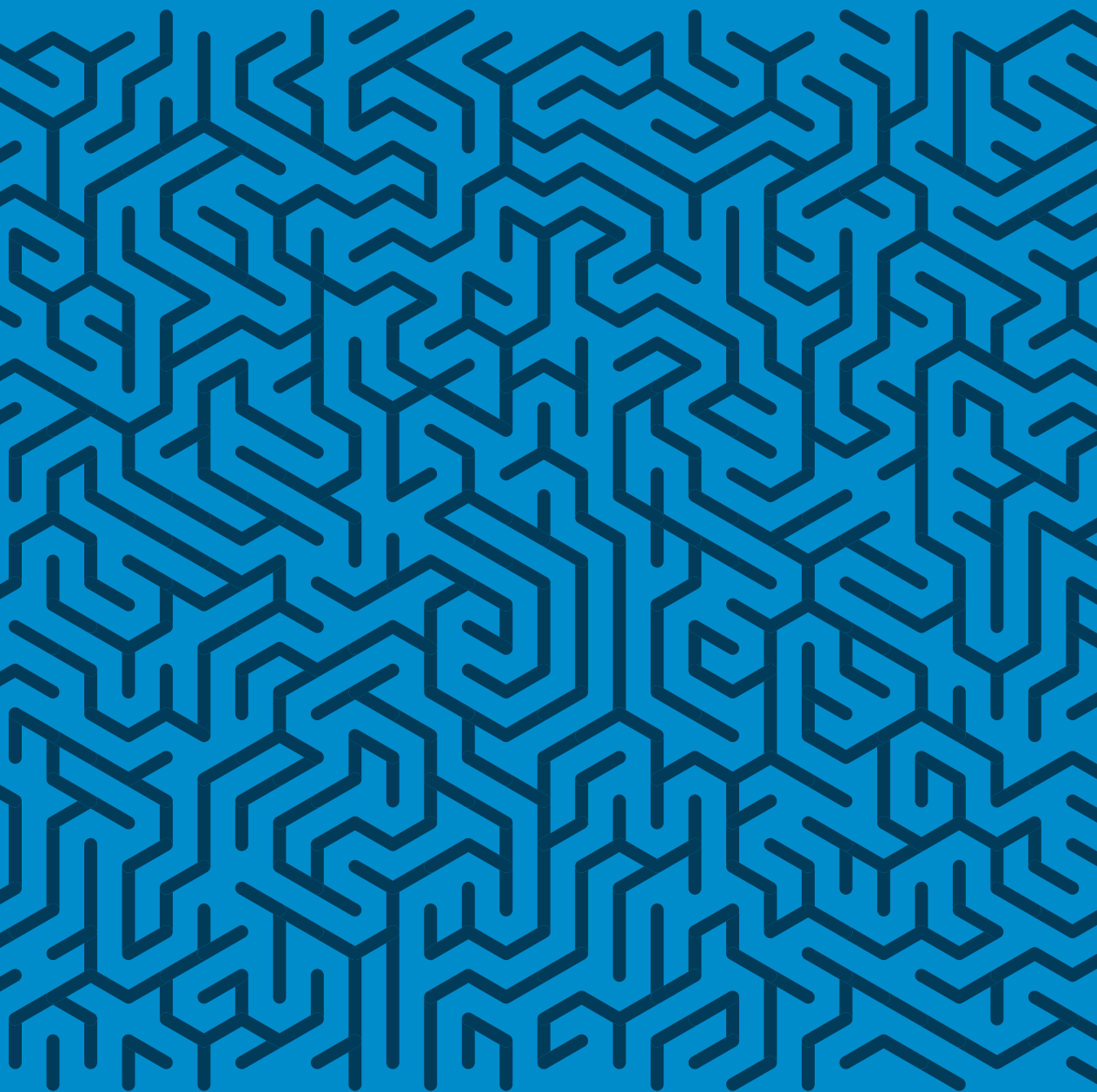


NAĎA VONDROVÁ A KOLEKTIV

# MATEMATICKÁ SLOVNÍ ÚLOHA



MEZI MATEMATIKOU,  
JAZYKEM A PSYCHOLOGIÍ

KAROLINUM

## **Matematická slovní úloha**

Mezi matematikou, jazykem a psychologii

### **Naďa Vondrová a kolektiv**

---

Recenzovali:

doc. PaedDr. Petr Eisenmann, Ph.D.

doc. PhDr. Eva Jandová, Ph.D.

prof. PhDr. Mgr. Tomáš Janík, Ph.D.

Autorský kolektiv:

Naďa Vondrová

Radka Havlíčková

Milada Hirschová

Martin Chvál

Jarmila Novotná

Anna Páchová

Irena Smetáčková

Martina Šmejkalová

Veronika Tůmová

Vydala Univerzita Karlova, Nakladatelství Karolinum

Praha 2022

Sazba Vydavatelský servis Plzeň

Vydání první

Monografie byla napsána s finanční podporou projektu GAČR 16-06134S

Slovní úlohy jako klíč k aplikaci a porozumění matematickým pojmům.

© Univerzita Karlova, 2019

Naďa Vondrová, 2019

ISBN 978-80-246-4516-2

ISBN 978-80-246-4531-5 (online : pdf)



Univerzita Karlova  
Nakladatelství Karolinum

[www.karolinum.cz](http://www.karolinum.cz)  
[ebooks@karolinum.cz](mailto:ebooks@karolinum.cz)



# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>9</b>
<b>1 Teoretická východiska výzkumu</b>	<b>15</b>
1.1 Charakteristika slovní úlohy	15
1.1.1 Povaha matematických a jazykových pojmů	16
1.1.2 Terminologie	17
1.2 Model procesu řešení slovních úloh	17
1.3 Některé příčiny žákovských obtíží	19
1.4 Zkoumání jazykové stránky slovních úloh	22
<b>2 Výběr parametrů a tvorba úloh</b>	<b>25</b>
2.1 Způsob analýzy slovních úloh	25
2.2 Parametry zadání slovních úloh	26
2.2.1 Zkušenostní kontext úlohy a způsob zadání	26
2.2.2 Obecné jazykové rysy slovních úloh	27
2.2.3 Matematické parametry	34
2.2.4 Výběr parametrů	37
2.3 Tvorba úloh	37
<b>3 Metodologie</b>	<b>41</b>
3.1 Výběr a popis škol	41
3.2 Rámcová strategie sběru dat	41
3.3 Popis souboru testovaných žáků	43
3.4 Vstupní testování	44
3.4.1 Koncepce vstupních testů	44
3.4.2 Administrace a vyhodnocení vstupních testů a dotazníků	44
3.4.3 Tvorba výkonnostně srovnatelných skupin	45
3.5 Rámcová koncepce testů pro hlavní testování	46
3.5.1 Tvorba testových sešitů pro HT1 a HT2	46
3.5.2 Příprava testů na základě výsledků předchozí vlny testování	47
3.5.3 Výběr úloh do jednotlivých testování	48
3.6 Administrace testů	48
3.7 Hodnocení žákovských řešení	48
3.8 Statistické analýzy	49
3.8.1 Využití výsledků vstupního testování	49
3.8.2 Parametrizace úloh hlavního testování	50
3.8.3 Postupy kotvení v IRT analýzách	50
3.8.4 Analýzy úloh napříč testováními a ročníky	51
3.8.5 Statistické testování rozdílů obtížnosti a diskriminace variant úloh	52
3.9 Způsob prezentace výsledků zjišťování rozdílů mezi variantami úloh	52
3.10 Rozhovory s žáky	54
<b>4 Soubor testovaných žáků z hlediska některých charakteristik</b>	<b>57</b>
4.1 Charakteristika žáků škol A až D na základě údajů z dotazníku	57
4.2 Latentní schopnost žáků účastnících se výzkumu	59
4.2.1 Popis manifestních proměnných	59
4.2.2 Vzájemné korelace manifestních proměnných	60
4.2.3 Souvislost latentní schopnosti žáků s manifestními proměnnými u žáků prvních čtyř škol	61
4.3 Shrnutí	62

<b>5</b>	<b>Zkušenostní kontext</b>	<b>65</b>
5.1	Související výzkum	66
5.1.1	Realita versus matematika	66
5.1.2	Typologie slovních úloh z hlediska kontextu	67
5.1.3	Vztah mezi řešením slovních úloh a problémových situací v reálném životě	68
5.1.4	Realita: motivační, nebo kognitivní efekt?	70
5.1.5	Obeznamenost se sférami reálného života a vztah řešení matematických a reálných problémů – výsledky dotazníku	71
5.2	Popis použitých úloh	73
5.3	Výsledky	74
5.3.1	Skupina úloh se sci-fi a fantasy kontextem	74
5.3.2	Skupina úloh s politicko-ekonomickým kontextem	80
5.3.3	Skupina úloh o součtu tras: diskuse s úlohou TIMSS	83
5.3.4	Skupina úloh o směsích	84
5.3.5	Skupina úloh s konceptuálním a procesuálním zadáním	85
5.3.6	Skupina nezařazených úloh	88
5.4	Diskuse a závěr	90
<b>6</b>	<b>Nadbytečné informace v zadání slovní úlohy (délka textu)</b>	<b>93</b>
6.1	Související výzkum	94
6.2	Popis použitých úloh	96
6.3	Výsledky	98
6.3.1	Nadbytečné informace na začátku zadání	98
6.3.2	Nadbytečné informace uvnitř zadání	100
6.3.3	Vysvětlující text	106
6.3.4	Úlohy s nadbytečným numerickým údajem	110
6.4	Diskuse a závěr	120
6.4.1	Parametr nadbytečné informace	120
6.4.2	Parametr nadbytečný numerický údaj	121
<b>7</b>	<b>Verbální a neverbální složka zadání slovní úlohy</b>	<b>123</b>
7.1	Související výzkum	123
7.2	Popis použitých úloh	125
7.3	Výsledky	126
7.3.1	Vyjádření čísel	126
7.3.2	Ilustrační obrázek	128
7.3.3	Ilustrační či reprezentační obrázek s reduplikovanou informací	130
7.3.4	Informační obrázek	133
7.3.5	Řešitelský obrázek	145
7.3.6	Řešitelské využití zadaných obrázků a spontánní kreslení obrázků vlastních	150
7.4	Diskuse a závěr	154
<b>8</b>	<b>Jazyková explicitnost zadání slovní úlohy</b>	<b>157</b>
8.1	Související výzkum	157
8.1.1	Přítomnost modálního výrazu, pořadí údajů ve větě (funkční větná perspektiva), explicitní vyjádření celku	157
8.1.2	Nepravá implikace	158
8.1.3	Okazionalismy	159
8.1.4	Ustálenost	160
8.2	Popis použitých úloh	160
8.2.1	Přítomnost modálního výrazu, pořadí údajů ve větě (funkční větná perspektiva), explicitní vyjádření celku	160
8.2.2	Nepravá implikace	161
8.2.3	Okazionalismy	162
8.2.4	Ustálenost	162
8.3	Výsledky	163

8.3.1	Přítomnost modálního výrazu, pořadí údajů ve větě (funkční větná perspektiva), explicitní vyjádření celku . . . . .	163
8.3.2	Nepravá implikace . . . . .	171
8.3.3	Okazionalismy . . . . .	174
8.3.4	Jazyková ustálenost . . . . .	175
8.3.5	Další projevy explicitnosti a implicitnosti textu . . . . .	183
8.4	Závěr . . . . .	186
<b>9</b>	<b>Pořadí informací v zadání slovní úlohy</b>	<b>189</b>
9.1	Související výzkum . . . . .	189
9.2	Popis použitých úloh . . . . .	190
9.3	Výsledky . . . . .	192
9.3.1	Výsledky podle charakteru zadání úlohy . . . . .	192
9.3.2	Pořadí informací v zadání a známost kontextu . . . . .	194
9.3.3	Pořadí informací v zadání a volba základní neznámé . . . . .	206
9.4	Diskuse a závěr . . . . .	207
<b>10</b>	<b>Návodnosti</b>	<b>209</b>
10.1	Související výzkum . . . . .	209
10.2	Popis použitých úloh . . . . .	211
10.2.1	Návodnost dobrých triád (návodnost na rovině matematické struktury) . . . . .	211
10.2.2	Návodnost vazby (návodnost na rovině sémantické struktury) . . . . .	212
10.3	Výsledky . . . . .	214
10.3.1	Návodnost dobrých triád (návodnost na rovině matematické struktury) . . . . .	214
10.3.2	Správná návodnost vazby: úlohy bez antisignálu . . . . .	216
10.3.3	Správná návodnost vazby: úlohy s antisignálem . . . . .	221
10.3.4	Správná návodnost vazby: bez antisignálu vs. s antisignálem . . . . .	224
10.3.5	Shrnutí kvalitativní analýzy chyb u úloh s antisignálem . . . . .	233
10.3.6	Falešná návodnost vazby . . . . .	234
10.4	Diskuse a závěr . . . . .	237
10.4.1	Návodnost dobrých triád (návodnost na rovině matematické struktury) . . . . .	237
10.4.2	Návodnost vazby (návodnost na rovině sémantické struktury) . . . . .	238
<b>11</b>	<b>Operátor a přítomnost stavu</b>	<b>241</b>
11.1	Související výzkum . . . . .	241
11.2	Popis použitých úloh . . . . .	243
11.3	Výsledky . . . . .	245
11.4	Diskuse a závěr . . . . .	257
<b>12</b>	<b>Slovní úlohy s antisignálem</b>	<b>261</b>
12.1	Související výzkum . . . . .	261
12.2	Popis použitých úloh . . . . .	264
12.3	Výsledky . . . . .	267
12.3.1	Antisignál a operátorové úlohy . . . . .	271
12.3.2	Antisignál a nadbytečný numerický údaj . . . . .	274
12.3.3	Antisignál a návodnosti . . . . .	278
12.4	Diskuse a závěr . . . . .	282
<b>13</b>	<b>Proporční a aditivní uvažování, úměrnosti</b>	<b>285</b>
13.1	Související výzkum . . . . .	286
13.1.1	Proporční versus aditivní situace . . . . .	286
13.1.2	Úměrnosti . . . . .	287
13.1.3	Typ poměru . . . . .	288
13.2	Popis použitých úloh . . . . .	289
13.2.1	Úlohy proporční versus aditivní . . . . .	289
13.2.2	Úlohy typu úměrnosti . . . . .	292
13.2.3	Způsob vyhodnocování dat . . . . .	294

13.3	Výsledky	295
13.3.1	Rozdíly v obtížnosti mezi aditivní a proporční variantou	295
13.3.2	Vliv přítomnosti informace o typu úměrnosti v zadání úlohy	303
13.3.3	Záměny struktury úlohy	306
13.3.4	Vliv typu poměru	312
13.4	Diskuse a závěr	314
13.4.1	Aditivní a proporční uvažování	314
13.4.2	Úměrnosti	316
<b>14</b>	<b>Shrnutí výsledků výzkumu</b>	<b>317</b>
14.1	Vliv zkoumaných parametrů na obtížnost slovní úlohy	317
14.1.1	Zkušenostní kontext	317
14.1.2	Přítomnost nadbytečných informací (délka textu)	318
14.1.3	Verbální a neverbální složka zadání slovní úlohy	319
14.1.4	Jazyková explicitnost zadání slovní úlohy	319
14.1.5	Pořadí informací v zadání slovní úlohy	320
14.1.6	Návodnosti	320
14.1.7	Operátor a přítomnost stavu	321
14.1.8	Antisignál	322
14.1.9	Proporční a aditivní uvažování a úměrnosti	322
14.1.10	Kombinace parametrů	323
14.2	Omezení výzkumu a jeho možné pokračování	324
<b>15</b>	<b>Didaktické důsledky výzkumu</b>	<b>327</b>
	<b>Summary</b>	<b>331</b>
	<b>Literatura</b>	<b>333</b>
	<b>Jmenný rejstřík</b>	<b>349</b>
	<b>Rejstřík</b>	<b>353</b>
	<b>Seznam zkratk</b>	<b>357</b>
	<b>Přílohy</b>	<b>359</b>
1	Příklad přiřazení úloh do testových sešitů (HT3)	359
2	Příklad testového sešitu pro 5. ročník z HT3	361
3	Příklad dotazníku pro žáky 5. ročníku	363
4	Zadání úloh použitých v testováních	369



# Úvod

Slovní úlohy tvoří neopominutelnou součást matematiky už od starověku. Byly a jsou využívány jako názorná ukázka skutečnosti, že zvládnutí matematických operací, získávané ve výuce matematiky od raného školního věku, může být pomůckou pro porozumění okolní realitě, zejména však může sloužit jako nástroj pro řešení praktických životních situací a úkolů. Měly by mj. dokazovat, že znalost a zvládnutí matematiky je užitečnou a využitelnou schopností, přinejmenším v tom okruhu témat, která se probírají na základní, resp. nižší střední škole. Uvědomění si vztahu školních úloh k praktickému životu by mělo žáky motivovat ke snaze matematickým pojmům a operacím porozumět, jednoduše z toho důvodu, že je to pro jejich budoucí praktický život potřebné. (Stranou samozřejmě nezůstávají obecně formativní cíle výuky matematiky.) Právě důraz na aplikaci matematických poznatků, která má být prostřednictvím slovních úloh ukázána, by měl fungovat jako podpůrný (motivační) prostředek jejich porozumění. Dodejme, že v úlohách samých je tento aplikační důraz někdy posílen užitím názorných doprovodných vyobrazení, tj. neverbálního vyjádření.

Ohledy na praktickou využitelnost matematických znalostí se zejména v nižších třídách zvýrazňují využíváním témat žákům blízkých; také v užívaných učebnicích a příručkách je zřejmá snaha žáky pro řešení slovních úloh zaujmout. Nicméně slovní úlohy nejsou mezi žáky příliš populární, a to dlouhodobě (Rakušanová, 1957; Novotná, 2000).<sup>1</sup> Jedním z hlavních důvodů jsou kognitivní nároky, které slovní úloha na žáky klade, totiž nutnost zpracovat významy zadané v jednom kódovacím systému (verbálně popsat situaci a činnosti prostředky přirozeného jazyka, spoléhat se při tom na mimojazykovou zkušenost a na intuitivní znalost vztahů mezi pojmovými obsahy lexikálních jednotek) a následně jej převést do systému jiného (vytvořit matematický model reprezentovaný matematickými pojmy/symboly a nadále operovat jen s ním; číselný výsledek je dále nutné převést do slovního vyjádření). Pro řešení slovní úlohy navíc zpravidla neexistuje předem daný algoritmus řešení (s výjimkou úloh, které lze zařadit do určitého typu, např. na přímou úměrnost či na pohyb).

Od prvotních předpokladů, že obtížnost slovní úlohy je dána její matematickou strukturou, se zhruba od 70. let 20. století výzkumná pozornost posunula i do oblastí dalších, často i nematematických charakteristik slovní úlohy. Proto bylo cílem výzkumu, jehož výsledky prezentuje tato kniha, přinést další vhled právě do problematiky různých aspektů participujících na výstavbě slovní úlohy. Zajímalo nás, které prvky a jakým způsobem se podílejí na míře obtížnosti slovní úlohy. Konkrétně jsme chtěli zjistit, jak její obtížnost, a tím i úspěšnost žákova řešení ovlivňují některé z jazykových, matematických či kontextových charakteristik úlohy, které v knize nazýváme parametry. K tomu účelu jsme vytvořili úlohy, každou v několika variantách, které se lišily jedním či dvěma parametry. Ty jsme zadávali výkonnostně vyrovnaným skupinám žáků 3. až 9. ročníku základní školy.

Rámcově lze náš výzkum rozdělit do šesti vln testování, v nichž žáci řešili slovní úlohy. Po zadání vstupních testů z matematiky a českého jazyka byly na čtyřech školách realizovány celkem čtyři vlny testování a na dvou dalších školách celkem dvě. Tím jsme od cca 3 300 žáků získali téměř 11 000 vyplněných testových sešitů, každý po čtyřech až šesti

<sup>1</sup>U našeho výzkumného vzorku však situace tak jednoznačná není (viz oddíl 4.1).

slovních úlohách, které bylo třeba vyhodnotit z hlediska úspěšnosti řešení i přítomnosti sledovaných jevů.

Pro získání představy o náplni výzkumu zde uvedeme přehled zkoumaných parametrů:<sup>2</sup>

- *Zkušební kontext* (obeznámenost žáků s kontextem úlohy, kap. 5)
- *Nadbytečné informace* v zadání úlohy (včetně přítomnosti nadbytečného numerického údaje, kap. 6)
- *Verbální a neverbální složka zadání* slovní úlohy (např. vliv přítomnosti různých druhů obrázků, kap. 7)
- *Jazyková explicitnost* zadání slovní úlohy (např. přítomnost modálního výrazu, jazyková ustálenost, kap. 8)
- *Pořadí informací* v zadání slovní úlohy (kap. 9)
- *Návodnosti* (návodnost čísel a návodnost vazby mezi objekty pojmenovanými v úloze, kap. 10)
- *Operátor a přítomnost stavu* (kap. 11)
- *Antisignál* (tedy slovo/slova vedoucí k opačné operaci, než vyžaduje správné řešení) (kap. 12)
- *Proporční a aditivní uvažování a úměrnosti* (kap. 13)

Z některých z těchto parametrů vyjímáme ještě dílčí parametry (např. parametr *úměrnosti* zahrnuje i parametr *typ poměru*).

Výrazným rysem našeho výzkumu je *multioborovost týmu*. Na výzkumu se podíleli odborníci z oblasti didaktiky matematiky, lingvistiky, psychologie a pedagogiky. To nám umožnilo zkoumat slovní úlohy z rozličných hledisek a v knize je postupně představíme.

Rámec výzkumu představuje první kapitola, která se zabývá *teoretickými východiskami*. Uvádíme, k jakému vymezení slovní úlohy se přikláníme, a stručně pojednáváme i o historii výzkumu slovních úloh.<sup>3</sup> Důraz klademe na podrobné pojednání o jazykové složce slovních úloh a o jejím vztahu k matematické struktuře úloh, neboť v tomto aspektu pokládáme náš výzkum za inovativní a první svého druhu v České republice. Konečně se zabýváme též různými modely, které popisují průběh řešení slovních úloh, a některými strategiemi, pomocí kterých žáci slovní úlohy řeší. V obou případech vycházíme nejen z didakticko-matematické literatury, ale také z literatury psychologické, v níž jsou slovní úlohy často zkoumány, a z literatury lingvistické a pedagogické.

Naší snahou bylo mj. sjednotit terminologii v oblasti slovních úloh, která je v předmětových disciplínách do jisté míry roztržštěná. Jednotné vymezení pojmů nám umožnilo jejich účelné využití v celé knize pro popsání dosažených výsledků pro jednotlivé parametry.

Ve druhé kapitole podrobně popisujeme, jak jsme postupovali při *výběru a identifikaci parametrů*, jejichž vliv na obtížnost slovních úloh jsme posléze zkoumali. Výběr byl založen na systematické analýze konkrétních slovních úloh, s nimiž se čeští žáci setkávají v učebnicích a různých testech, doplněné studiem odborné literatury zkoumající vliv různých charakteristik úlohy na úspěšnost jejího řešení. Takto jsme dospěli k velkému počtu potenciálně důležitých parametrů, které jsme pro potřeby prezentace v knize sdružili do

<sup>2</sup>Názvy parametrů budeme pro přehlednost psát kurzívou.

<sup>3</sup>Naopak se nezabýváme historií samotných slovních úloh, byť se jedná o zajímavou problematiku.

---

větších skupin. Už z povahy věci, tedy z faktu, že slovní úloha se skládá z jazykové a matematické vrstvy, plyne, že tyto skupiny nejsou disjunktní, navzájem se překrývají. Ze seznamu identifikovaných parametrů jsme postupně vybírali ty, které jsme se z různých důvodů, které budou rozvedeny v dalším textu, rozhodli blíže prozkoumat. K tomu bylo nutné vytvořit varianty úloh, které se budou lišit právě jen v jednom zvoleném parametru, jenž mohl být v rámci úlohy různě kombinován s parametrem jiným. Tento nelehký úkol popisuje oddíl 2.3 věnovaný tvorbě testových úloh.

Třetí kapitola detailně představuje *metodologii* našeho výzkumu, která dává čtenáři možnost nahlédnout do procesu získávání výzkumného souboru žáků, dat i jejich interpretace. Do výzkumu jsme postupně zapojili šest pražských škol, a to od 3. do 9. ročníku. Protože se nesnažíme podávat zprávu o tom, jak čeští žáci řeší slovní úlohy, ale naším primárním cílem je zjistit, jak který parametr změní obtížnost slovní úlohy, nebylo třeba získat náhodný vzorek žáků z celé České republiky. Nicméně kladli jsme důraz na dostačnou heterogenitu souboru žáků, která je blíže popsána v oddíle 3.1.

Z oblasti metodologie zdůrazníme zejména způsob zpracování analýz získaných dat. Na rozdíl od klasické teorie testů, která pracuje s průměrnou úspěšností skupiny žáků, my jsme pracovali metodou Item Response Theory (dále jen IRT), která disponuje propracovanější metodikou zohledňující kognitivní úroveň každého žáka. Algoritmy výpočtů postavené na vhodné skladbě testových sešitů a jejich administraci nám umožnily propojit výsledky vstupních testů z matematiky a českého jazyka s výsledky testů z jednotlivých vln testování. Tím jsme lépe odstínilí případný efekt heterogenity skupin žáků řešících vždy určitou variantu úlohy, než by tomu bylo, pokud bychom pro rozdělení do skupin použili jen výsledky vstupních testů. Konečně IRT přináší podrobnější vhled do rozdílů v obtížnosti úloh než klasická teorie testů. Protože IRT je poměrně komplikovaná, věnovali jsme jejímu konkrétnímu použití v našem výzkumu v metodologické kapitole velkou pozornost (oddíl 3.8).

Důležitým rysem výzkumu zpracovaného v této knize je jeho smíšený design. Výzkum je sice primárně kvantitativní, ovšem jeho výsledky jsou interpretovány též kvalitativně, a to jednak pomocí analýzy písemných žákovských řešení (např. z hlediska použitých strategií řešení či přítomnosti chyb) a jednak s oporou o kvalitativní data získaná z polostrukturovaných rozhovorů s žáky. Rozhovory nám umožnily do jisté míry vysvětlit někdy překvapivé vlivy některých parametrů i jevy, které jsme sledovali v písemných řešeních žáků.

Díky podrobnému popisu procesu výzkumu ve třetí kapitole se budeme moci v dalších kapitolách vyjadřovat už stručněji s předpokladem, že čtenář si je metodologických charakteristik výzkumu vědom. Pro pochopení našich závěrů je nezbytný dobrý vhled do prezentace výsledků, kterou vysvětlujeme v oddíle 3.9. Výsledky budou totiž v dalších kapitolách prezentovány prostřednictvím tabulek a IRT grafů, které již nebudou znovu vysvětlovány.

Čtvrtá kapitola přináší zprávu o *výzkumném souboru žáků* z pohledu informací, které jsme o nich zjistili na základě dotazníků, a zejména z pohledu latentní schopnosti (kognitivní úrovně) žáků. Ta je podrobněji charakterizována prostřednictvím dalších žákovských proměnných, jako jsou pohlaví, prospěch a výsledky ze vstupních testů. K latentní schopnosti žáků jsou vztaheny všechny klíčové výsledky v naší knize, proto je důležité porozumět nejen její operacionalizaci, ale i jejímu vztahu k běžně užívaným manifestním proměnným.

Pátá až třináctá kapitola jsou věnovány *konkrétním parametrům slovních úloh*, které jsme zkoumali (viz výše). Tyto kapitoly mají vždy stejnou strukturu. V jejich úvodu

zdůvodňujeme výběr daného parametru, poskytujeme jeho širší kontext a vymezujeme pojmy, které jsou pro něj specifické. V prvním číslovaném oddíle kapitol jsou stručně shrnuty výsledky zkoumání daného parametru, a to zejména v zahraničním výzkumu<sup>4</sup> (pokud existuje – např. některé jazykové rysy typické pro češtinu přirozeně zahraniční výzkumy neevidentují). V následujícím oddíle popisujeme, jak jsme vybírali úlohy pro daný parametr. Protože některé parametry zkoumáme mnoha úlohami a chceme se vyhnout dlouhým výčtům zadání, které by narušily tok textu, v příslušném oddíle uvádíme zpravidla jen příklady úloh, přičemž další jsou uvedeny u prezentace výsledků a na další odkazujeme do přílohy 4. V této příloze jsou uvedeny všechny úlohy zadané v testech, které jsme využili pro získání výsledků shrnutých v kapitolách 5 až 13. V samotných kapitolách prezentujeme<sup>5</sup> především ty, u nichž se nějakým způsobem prokázaly rozdíly, nebo ty, u nichž jsme získali výsledky hodné pozornosti z jiného hlediska. Pro přehlednost uvádíme u zadání i výsledek úlohy.

Zde je na místě poznámka o zdrojích úloh, které jsme použili ve výzkumu. Určení autorství úloh v matematice je obecně komplikované. Některé jsou opakovaně používány autory učebnic nebo různých testů, jiné se objeví v internetových zdrojích bez udání autora. U některých úloh, které jsme v našem testování použili, můžeme s jistotou říct, odkud jsme některou z jejich variant přebrali, či na základě jaké úlohy jsme naše úlohy modelovali. V takovém případě to je uvedeno přímo u dané úlohy v příslušné kapitole a dále v příloze 4. Někde to však říct nedovedeme. Každá úloha vznikala za mnohých diskusí celého řešitelského týmu a doznala od svého prvního uvedení do diskuse mnoha změn. Pokud tedy není u úlohy uveden její zdroj, jedná se podle našeho nejlepšího svědomí o úlohu, kterou vytvořil či výrazně upravil řešitelský kolektiv. Nemůžeme však vyloučit, že se podobná úloha neobjevuje ještě někde jinde.

Třetí oddíl kapitol 5 až 13 podrobně prezentuje výsledky, k nimž jsme dospěli na základě analýz písemných řešení žáků a jejich zpracování pomocí IRT. Kvantitativní výsledky jsou doplněny výše uvedenými kvalitativními, přičemž oba typy výsledků od sebe neoddelujeme, nýbrž poznatky z rozhovorů s žáky a z písemných žákovských řešení<sup>6</sup> uvádíme na místě, kde dobře osvětlí kvantitativní poznatky. Konečně poslední oddíl kapitol věnovaných parametrům obsahuje stručné shrnutí výsledků a jejich interpretaci ve světle existujících výzkumů a – podle povahy parametru – ve světle kurikulárních dokumentů či učitelské zkušenosti. Z našich výsledků zpravidla plynou i určité didaktické a výzkumné implikace.

V *závěru knihy* jsou stručně shrnuty výsledky týkající se vlivu jednotlivých parametrů, ale také poznatky jednotlivé parametry přesahující. Tyto poznatky se týkají jevů, které jsme identifikovali v písemných řešeních žáků u úloh napříč parametry či v rozhovorech vedených s žáky nad různými slovními úlohami. Podobně se věnujeme i omezením našeho výzkumu a jeho možnému pokračování. Získaná data jsou totiž natolik bohatá, že jsme z nich využili jen část. Navrhujeme další hlediska, z nichž by se data dala reinterpretovat a doplnit. Konečně shrnujeme a rozpracováváme didaktické důsledky našeho výzkumu formou doporučení pro výuku nejen slovních úloh v matematice, ale také porozumění textu v českém jazyce. Naš výzkum neověřoval didaktické přístupy k výuce slovních úloh,

<sup>4</sup>Pokud je nám známo, systematické zkoumání slovních úloh nebylo v České republice provedeno, existují spíše dílčí studie a zkušenosti sdílené učitelskou obcí.

<sup>5</sup>V úlohách, které řešili žáci, nebyly použity žádné grafické prostředky pro zvýraznění textu. Pokud se v kapitolách grafické prostředky v zadání úloh objevují (např. prostřednictvím kurzívy), tak jen proto, abychom zvýraznili, v čem se zkoumaný parametr v zadání konkrétně projevuje.

<sup>6</sup>Žákovská řešení, která pocházejí z rozhovorů, jsou označena fiktivním křestním jménem žáka spolu s jeho ročníkem. Řešení převzatá z testování je označeno jen ročníkem.

---

a proto didaktické důsledky vyplývají z našich závěrů jen zprostředkovaně. Nicméně úvahy o možných didaktických přístupech, které by předešly identifikovaným problémům žáků či snížily jejich výskyt, považujeme za nedílnou součást takto široce zaměřeného výzkumu. U didaktických doporučení se proto vedle závěrů, které vyplývají z našich zjištění, opíráme také o existující výsledky výzkumů, které se námi doporučovanými praktikami zabývají.

Závěrem uvedeme několik terminologických poznámek. Termínem (*slovní*) *úloha* označujeme dvojici, trojici či čtveřici *variant*, které se liší jedním nebo dvěma parametry. Výraz *žák* chápeme jako pedagogickou kategorii a označujeme jím žákyně i žáky. Totéž platí v knize i pro termín *řešitel*, *učitel*, *tazatel*, *administrátor* či *opravovatel*, z nichž některé vedle pedagogické kategorie chápeme i jako generické (nepříznakové) maskulinum.<sup>7</sup> Ve shodě s praxí užívanou v nejnovějších lingvistických publikacích volíme pro ženská zahraniční jména přechýlení s dodanými závorkami (např. „Jak píše Smith(ová)...“) (Karlík, Nekula, Pleskalová, eds., 2017). Snažíme se tak ponechat čtenáři možnost jednoznačné identifikace autorky prostřednictvím původní podoby příjmení a zároveň dodat informaci, že jde o ženu. Další pojmové a terminologické otázky jsou popsány v oddíle 1.1.2.

Knih je určena nejen výzkumníkům z oblasti didaktiky matematiky, ale také lingvistiky, pedagogiky a pedagogické psychologie. Věříme, že bude přínosná i pro doktorandy těchto oborů. Praktické důsledky našich zjištění mohou být inspirativní i pro učitele matematiky a českého jazyka a tvůrce testů (podrobněji viz v závěru knihy).

---

<sup>7</sup>Jelikož v našem výzkumném týmu zřetelně převažovaly ženy, nepokládáme užití generického maskulina za prostředek jazykové marginalizace žen, nýbrž nám slouží prostě jako prostředek jazykové ekonomie (viz komplikující požadavek rodové specifikace, např. *zadavatelé* a *zadavatelky*, či rodové neutralizace, která vede k syntaktické nezřetelnosti, srov. např. *zadávatel*, které by oba ztěžovaly plynulost čtení).



# Teoretická východiska výzkumu

V této kapitole vymežíme pojem slovní úloha z jazykového, didakticko-matematického a psychologického hlediska a pojednáme o jejích lingvistických a strukturálních charakteristikách. Představíme model řešení slovní úlohy, o který se budeme opírat v dalších kapitolách knihy. V závěru kapitoly pojednáme o problematice možných příčin obtíží žáků při řešení slovních úloh zejména z jazykového hlediska. Obtíže vznikající na základě spíše matematických charakteristik<sup>8</sup> úloh budou podrobně rozebrány v kap. 6, 9, 11, 12 a 13, proto se jich zde dotkneme jen okrajově.

## 1.1 Charakteristika slovní úlohy

Slovní úloha je nejobecněji vymezena autorskou intencí vytvořit verbálně zakódovaný, tj. slovně, nikoli matematickými symboly formulovaný úkol pro žáka. Tato intence vede produktora/autora úlohy k začlenění vytvářené slovní úlohy do širšího kontextu dalších, dříve vytvořených matematických úloh, které se zpravidla naplňují inovovaným obsahem. Z psychologického hlediska lze slovní úlohu spatřovat jako specifický typ problému, přičemž problém představuje situaci, která není řešitelná obvyklým způsobem, a její zvládnutí tedy vyžaduje nalezení nového řešení (Sternberg, 2003). V tomto smyslu slovní úlohy nejsou skutečnými problémy, protože jejich řešení obvykle není pro žáky zcela novým postupem. Společný jmenovatel s psychologickou definicí problémů ale je, že ve slovních úlohách musí dojít ke strukturaci prvků problémové situace, z které ihned nebo po restrukturaci vyplyne řešení.

V didaktice matematiky za slovní úlohu někteří autoři (např. Vyšín, 1962) považují jakýkoli slovně formulovaný matematický úkol, tedy např. „Urči takové číslo  $x$ , jehož trojnásobek zvětšený o jednu je 73.“ V takových slovních úlohách, i když vyžadují částečný převod popisu matematických operací (*trojnásobek* znamená 3krát, *zvětšený o jednu* znamená +1), je matematický model již předložen a není třeba ho sestavovat.

Většina autorů klade na slovní úlohu podmínku přítomnosti kontextu, např. Divíšek et al. (1989) či Kuřina (1989), podle kterého je ve slovních úlohách „popsána určitá reálná situace“ (s. 61), k níž jsou položeny otázky. Tohoto pojetí se v zásadě držíme i v našem výzkumu. Za slovní úlohu považujeme takovou úlohu, která obsahuje nějaký kontext (který může být reálný, pseudo-reálný či imaginární) a v níž jsou některé numerické údaje dány a jiné se hledají. Úloha obsahuje jeden nebo více úkolů (ve formě otázek nebo imperativních vět), které lze splnit za pomoci těchto numerických údajů, vztahů mezi nimi, které řešitel vyvodí ze zadání, a řešitelových znalostí a zkušeností, včetně mimoškolních. Úkolem žáka je situaci/příběh matematizovat, tj. (a) určit, které prvky budou vyjádřeny matematickými symboly, (b) zjistit, jakou, resp. jaké operace bude nutné s těmito prvky provádět a v jakém pořadí, aby bylo nalezeno řešení problému (adekvátní odpověď na položenou otázku). Řešení je následně třeba ověřit, protože mnohé slovní úlohy sugerují více možností matematizace, kdy tvůrce úlohy vědomě postupuje opačným směrem, než očekává od žáka, který bude úlohu řešit.

<sup>8</sup>Hranice mezi parametry není ostrá. Např. parametr *antisignál* či *pořadí informací* můžeme vidět jako matematický i jazykový.

### 1.1.1 Povaha matematických a jazykových pojmů

Matematické pojmy se od jazykových liší jednak neexistencí empirické reference (Materna, 2000: s. 90), jednak tím, že v jazyce neexistuje žádný soubor „základních pojmů“, zatímco v matematice ano. Pojmy jsou objektivní abstraktní (ideální) entity, které mohou být reprezentovány výrazy jazyka (ibid.: s. 17), ale s jedním pojmem může korespondovat více jazykových pojmenování/výrazů (a naopak), viz tradiční chápání arbitrárnosti jazykového znaku (např. Karlík, Nekula, Pleskalová, 2017: s. 2 122). Běžné (automatické) porozumění určitému jazykovému výrazu předpokládá identifikaci pojmu, který je tímto výrazem reprezentován, a také identifikaci potenciálního referentu, ke kterému se tento výraz může v konkrétní výpovědi v určitém kontextu vztahovat. U textů slovních úloh se však dá předpokládat, že je to právě primární zaměření řešitelů na empirickou referenci jazykových výrazů, které transfer od jazykového vyjádření k matematickým pojmům „zdržuje“. Jde o to, že referenční hodnota výrazů se vzhledem k zapojení do kontextu a vzhledem k mimojazykové zkušenosti a komunikační kompetenci vnímatelů může pro každého z nich proměňovat, i když jejich pojmový obsah zůstává stejný.<sup>9</sup> Zkušenosti se vztahy objektů/entities mimojazykové skutečnosti (pragmatické inference), které jsou ve slovních úlohách pojmenovávány, mohou s modelováním (matematizací) potřebným k řešení úlohy korelovat, pak řešení usnadňují; jindy musí být adekvátní vztahy teprve nalezeny, resp. je třeba si je uvědomit.

Entity a vztahy mezi nimi verbálně popsané (pojmenované) v textu slovní úlohy jako reálné musejí být vyjádřeny výrazy matematickými (číslly nebo symboly) a vztahy mezi prvky popsané situace nebo činnosti musejí být převezeny na operační termíny. Např. „=“ vyjadřuje možnost nahradit jednu entitu druhou („Pepa má stejné množství kostek jako Jana.“), „+“ vyjadřuje např. sjednocování („Pepa a Jana mají dohromady určité množství kostek.“), „-“ např. odlučování („Pepa si vzal z krabice určitý počet kostek.“), „ $x^2$ “ vyjadřuje  $x$ -násobné opakování  $x$  („Jana si  $x$ krát vzala z krabice  $x$  kostek.“) apod. Ve výrazu např.  $x^2 + y = z - u$  se každý ze symbolů a operačních termínů vztahuje k nějaké činnosti, která by mohla být reálná a jako reálná se popisuje v textu slovní úlohy. Při řešení slovních úloh je však úkolem dospět k matematickému, tedy abstraktnímu označení myšlenkových operací. K charakteristice myšlenkových operací srov. (Piaget, 1967: s. 33, 119–155; Piaget, 1966/1999: s. 41–42, 50–54). Z Piagetových výzkumů v mnohém vychází Reusser (1985, 1992). Ten upozorňuje, že matematické myšlení vývojově vychází z jednání, nejde však o jednostupňovou internalizaci/abstrakci, ale o postupné myšlenkové redukování „akce“ až na její strukturní jádro:

[...] na učení se základům matematiky můžeme pohlížet jako na proces, při němž se učíme soustřeďovat na kvantitativní a numerické aspekty jednání a situací. Proto vývoj základních matematických operací jde ruku v ruce, i když ne zcela paralelně, se schopností dítěte chápat a vykonávat každodenní činnosti a rozumět přirozenému jazyku a používat ho. (Reusser, 1985: s. 4, překlad autoři)

Důležitá je zejména schopnost abstraktně uchopit vztah mezi *akcí* a (matematickou) *operací*. Hlavním zdrojem potíží při řešení slovních úloh je právě nutný proces abstrakce, přechod od jazykových pojmenování a vazby pojmových obsahů těchto pojmenování k realitě (nutně související s vlastní zkušeností žáka), k nutnosti substituovat je jednotkami

<sup>9</sup>Např. slovo *pes* má stále stejný pojmový obsah, ale při jeho užití si každý mluvčí primárně vybaví jiné zvíře, se kterým má zkušenost.



abstraktními a následně operovat s nimi; zdroje potíží však mohou být v různých situačních kontextech i jiné.

### 1.1.2 Terminologie

V mezioborovém výzkumu z oblasti lingvistiky, didaktiky matematiky a psychologie bylo nutné se vyrovnat s některými pojmovými i terminologickými odlišnostmi. V literatuře zabývající se slovními úlohami se např. běžně počítá s tím, že součástí zadání úlohy je jednak předmětná oblast, a to objekty, o nichž se v úloze mluví, jednak vztahy, které objekty navzájem spojují; tyto dvě složky se označují jako *podmínky úlohy*. Martin(ová) a Bassok(ová) (2005) hovoří o *sémantických vztazích* mezi objekty (vztahy mohou být funkční – tulipány a vázy; nebo kategoriální – tulipány a sedmikrásky). Jde však o to, že součástí slovní úlohy, resp. oněmi *sémantickými vztahy*, s nimiž se ve slovní úloze pracuje, nejsou objekty samé, nýbrž jejich pojmenování, přesněji řečeno pojmové obsahy (mentální reprezentace) těchto pojmenování. Empirické, tj. žákům z mimojazykové zkušenosti známé vztahy mezi pojmenovanými objekty se do chápání vztahů mezi pojmovými obsahy buď přenášejí, nebo se jako součást řešení teprve hledají. Tento rozdíl se objevuje zejména u úloh s tzv. známým kontextem, přesněji řečeno se známým zkušenostním kontextem; proti nim stojí nutnost operovat v některých úlohách s pojmy, které pro žáky empirické, tj. zkušenostní analogie nemají.

Při posuzování faktorů ovlivňujících úspěšnost řešení slovních úloh je zřetelně odlišné chápání termínu *operátor*. V lingvistickém smyslu se za operátor považuje výraz, který má sémantiku funkce, např. operátor negace nebo modální sloveso operují na propozici (operátor je uplatněn na různé složky obsahu věty, nebo jí může být předřazen jako celku); srov. heslo Operátor v (Karlík, Nekula, Pleskalová, 2017). V matematickém smyslu je číslo v roli operátoru tehdy, když reprezentuje vztah dvou stavů (viz oddíl 2.2.3). Termín *operace* byl zmíněn výše – podle Piageta (1966/1999 aj.) jde u operačního myšlení o gradované stadium v postupném vývoji inteligence, které začíná s nabýváním jazyka a dovršuje se v adolescenci.

Dalším termínem, který je nutno komentovat, je *kontext*. Lingvisticky se rozlišuje *bezprostřední kontext slovní* (např. mezivětné odkazování deiktickými slovy), *kontext situační* (určuje v diskursu referenční hodnotu indexů *já, ty, tady, teď* a výrazů od nich odvozených) a *kontext zkušenostní* (zásoba znalostí a zkušeností, o nichž produktor předpokládá, že ji s ním příjemce sdílí). V pracích zabývajících se slovními úlohami se jako *více* či *méně známý kontext* označuje zejména poslední zmíněná varianta; z úvah o „obtížnosti“ jazykového vyjádření úloh však plyne, že jistou roli mohou mít i faktory spojené se situačním kontextem.

Poznámku zasluhuje i termín *modalita*. O *modalitě* a *modálních výrazech* v lingvistickém smyslu, tedy jako o modifikátorech významu větného predikátu, se pojednává v oddíle 2.2.2; o úlohách s modálními výrazy v kap. 8. *Epistémická modalita* (postoj mluvčího vyjadřující jeho znalosti nebo mínění o pravdivosti informace) je zmíněna v souvislosti s kognitivně-postojovými predikáty níže.

## 1.2 Model procesu řešení slovních úloh

Slovními úlohami byla jak v českých (např. četné práce Novotné a Hejného), tak v zahraničních publikacích věnována rozsáhlá pozornost. V 80. letech 20. stol. se objevuje modelační přístup ke zkoumání role jazykové stránky slovní úlohy (Reusser, 1985). Jde o vliv prací psychologa Kintsche, který spolu s teoretikem diskursivní analýzy Van Dijkem (1983) vypracoval a později jinde experimentálně využil (Kintsch, Greeno, 1985) analýzu a popis strategií porozumění diskursu (zde míněno textové jednotky). Van Dijk

při identifikaci těchto strategií využil svůj dřívější (1980) koncept tzv. makrostruktur. Jde o složky textu, zobecněné sémantické jednotky (makropropozice), ukazující, jak je v textovém celku uspořádán obsah, jak je informace nesená textem zorganizována. Intuitivní vytváření makrostruktur při mentálním zpracování (chápání) textu není jen vytváření obsahového kondenzátu, ale na výsledku se podílejí i jisté myšlenkové operace (propoziční strategie). Ty ukazují, jak vnímatel jednotlivé složky textu (propozice, tj. celky organizované kolem individuálních predikátů) a jejich vzájemné vztahy (resp. vztahy těchto složek k mimojazykové skutečnosti a k vnímatelovým existujícím konceptuálním strukturám) chápe. Jde např. o generalizace, integrace, redukce (vynechávání irelevantních prvků), ale i nezměněné přejímání celých propozic (pokud jsou pro organizaci obsahu zásadní), uspořádání v časové následnosti. Makrostruktura, která je výsledkem takových strategických kroků (pochopení textové jednotky), ukazuje, jak vnímatel pochopil obsahové jádro textu. Analogicky lze při zpracování obsahové analýzy textu docházet k jednotkám menším, k mikropropozicím, které jsou jednotlivými komponenty celkovému porozumění textu; zejména jde o pojmové obsahy klíčových slov.

Při mentálním zpracování textu jde tedy zároveň o jeho interpretaci související s pracovní pamětí<sup>10</sup>, vnímatel si průběžně vytváří svůj vlastní (procesuální) mentální model obsahu, kombinuje receptivní a produktivní aktivitu. Kintsch i již zmíněný Reusser se v 80. letech podíleli na experimentech (srov. Cummins et al., 1988), při nichž se zkoumal vztah mezi úspěšností řešení slovně formulované úlohy a jejím pochopením na straně žáka. Pochopení bylo testováno jednak na schopnosti žáka úlohu „vlastními slovy“ reprodukovat, jednak na tom, zda byl žák schopen utvořit k (nedokončené) úloze finální otázku, tj. ukázat, že pochopil, na co je úloha zaměřena. To, co testování žáci předkládali, byly jimi zkonstruované mentální modely; omyly při řešení (chybně zvolené aritmetické strategie) totiž vždy souvisely s chybným pochopením předkládané úlohy, jež zpravidla plynulo z abstraktních vyjádření v textu úlohy nebo z potenciálních dvojnázností (srov. parametr *jazyková explicitnost* v kap. 8).

Ve svých vlastních výzkumech rozděluje Reusser (1985, 1989, 1992) proces řešení slovní úlohy do několika kroků. Jako první krok předpokládá zpracování textového vstupu do (sémantického) mikro- nebo makrostrukturního modelu (tzv. *textové báze*). Druhým krokem je vytvoření tzv. *situčního modelu*, který má ukázat, co je cílem úlohy. Zahrnuje vytvoření modelu situace (složené z epizod včetně časových vztahů mezi nimi) koordinovaného s textovouází; tento model má objasňovat, k čemu má textem popsaná situace nebo jednání konatelů dospět: jde o stanovení problému, tj. identifikaci informační mezery, na kterou má být zaměřena relevantní otázka.<sup>11</sup> Třetím krokem je zkonstruování *matematického modelu* vhodného pro aplikaci kalkulačních strategií. Vytvoření tohoto modelu lze popsat jako výsledek procesu abstrahování/redukování situčního modelu; matematický model je relační struktura obsahující pouze jádrové momenty situace a kvantitativní vztahy mezi nimi. Akce (jednání a vztahy entit) jsou interpretovány jako operace, počty objektů jsou nahlíženy jako funkčně definované prvky nebo jejich sady, začleněné do matematické operační struktury. Tento matematický model může mít dvě úrovně: nenumerický,

<sup>10</sup>Pracovní paměť chápeme spolu s Cowanem jako systém umožňující udržení informace v aktuální paměti a její aktivní vybavení (Cowan, 2010).

<sup>11</sup>Při výuce jsou žáci vedeni k zaznamenání klíčových aspektů situčního modelu prostřednictvím vhodného znakového systému (referenčního jazyka). Tento záznam budeme v naší monografii nazývat termínem *legenda* (učitelé hovoří též o *zápise*). Polya (1945/1988) uvádí tři typy kódování informací ze zadání: pomocí rovnic, grafické a diagramové. Podrobněji se kódování údajů ze zadání a typům legend věnuje např. Novotná, která představuje čtyři základní typy legend: slovní, tabulkové, obrázkové a algebraické (2000: s. 27–29).

ale již abstraktní (schematický) matematický model problému, nebo formální numerický (nebo algebraický) matematický model.<sup>12</sup> K vytváření takových modelů významně přispívá postupně rozšiřovaná dětská zkušenost s matematickými texty a intencionálnost, tedy zaměření produkční aktivity specificky na matematizaci (na aritmetické strategie; Reusser, 1995: s. 58, 81–82). V matematickém modelu již může být otázka na problém jednoznačná (např. *kolík/o kolík/kolíkrát*, *ibid.*: s. 149–151, 203, obr. 3–6). I když je matematický model (rovnice) atemporální (bez časové dimenze), v něm obsažené operace (abstraktní jednání) využívají časoprostorové údaje v situačním modelu jako názornou oporu (*ibid.*: s. 201–203).

Výsledkem Reusserových analýz je didaktický model řešení slovních úloh sestávající z pěti navazujících komplexních kroků (*ibid.*: s. 321), přičemž 1. krok, porozumění textu, obsahuje (a) překlad neznámých nebo obtížných slov, (b) zjednodušení gramaticky obtížných vět, (c) převyprávění (*renarration*) úlohy vlastními slovy. Dalšími, opět komplexními kroky jsou 2. porozumění situaci a problému v ní ve věcných souvislostech, generování otázek; 3. matematizace situační představy; 4. provedení výpočtu (numerické řešení); 5. vytvoření odpovědi – interpretace numerického výsledku na podkladu věcné představy problému.<sup>13</sup> Závěr studie ovšem konstatuje, že experimentální ověření modelu je věcí dalšího výzkumu.<sup>14</sup>

Řešení praktických i akademických problémů, včetně matematických slovních úloh, lze nahlížet i z kognitivního hlediska a rozdělit ho do následujících sedmi kroků (Reed, 2000; Sternberg, 2003): (a) identifikace problému, (b) definování problému, (c) uspořádání informací, (d) zhodnocení zdrojů pro řešení, (e) volba strategie, (f) monitorování procesu řešení, (g) zhodnocení výsledku řešení.

Pro úplnost dodejme, že řada prací o fázování řešení slovních úloh vychází z klasického modelu řešení matematické úlohy podle Polyi (1945/1988: s. 6–15):

- a) pochopení problému (co se hledá? co známe? jaké jsou podmínky? jsou známy všechny podmínky? apod.)
- b) vytvoření plánu (už jsi podobnou úlohu řešil? znáš podobnou úlohu? znáš nějakou metodu, která by se dala použít? dovedeš řešit jednodušší úlohy? apod.)
- c) realizace plánu (realizuj plán a kontroluj každý krok, je každý krok pravdivý? apod.)
- d) pohled zpět (zkontroluj nalezený výsledek, můžeš k němu dospět i jinak? můžeš použít daný postup i u jiné úlohy? apod.).

Uvedené periodizace řešení (matematického) problému rozlišují obdobné fáze. Psychologický a didaktický přístup je tedy ve shodě.

### 1.3 Některé příčiny žákovských obtíží

Příčiny obtíží žáků<sup>15</sup> při řešení slovních úloh můžeme spatřovat přímo v jazykové podobě slovní úlohy, která může být obtížně srozumitelná nebo nejednoznačná. Může jít o takové

<sup>12</sup>Srov. Reusser, 1985: s. 13; 1995: s. 91–92, s. 255.

<sup>13</sup>V tomto smyslu se v české literatuře hovoří o tzv. sémantické zkoušce (oproti zkoušce správnosti numerických výpočtů).

<sup>14</sup>Zejména zkoumání bodu (c) v prvním kroku je nutno si představit jako mimořádně časově náročné, např. výše citovaná studie Cummins(ové) et al. (1988) pracovala pouze s 26 žáky.

<sup>15</sup>Další odkazy na výzkumy v této oblasti jsou součástí kapitol 5 až 13, kde jsou využity pro možné vysvětlení obtíží žáků, které jsme identifikovali v našem výzkumu. Zde je nepopisujeme, abychom zamezili zbytečnému opakování.

formulace, které jsou např. stylově nebo lexikálně příznakové – jsou výrazně kondenzované, obsahují terminologii, s níž žáci nejsou obeznámeni, historismy nebo archaismy, tj. formulace vyžadující vyšší úroveň gramatické kompetence a širší slovní zásobu. Může však také jít ze strany žáka o nerozvinutou schopnost, popř. neochotu identifikovat v textech úloh právě ty údaje/prvky obsahu, které mají (mohou) být do matematického modelu použity. Podstatným, působícím faktorem spojeným se slovní úlohou tedy může být nutnost kognitivního zpracování (interpretace) textu žádoucím způsobem. Z hlediska porozumění slovním úlohám jakožto specifickým textovým/komunikačním útvarům a z hlediska nacházení jejich adekvátní interpretace (přístup k řešení úlohy je výsledkem její interpretace) jde o nutnost uplatnění dvojí kompetence, totiž *kompetence komunikační* (gramatické kompetence a obeznámenosti se slovní zásobou, jež jsou nutné k interpretaci jazykového kódování) a *kompetence matematické*.<sup>16</sup> Úroveň komunikační kompetence v mateřském jazyce může limitovat přístup k využití kompetence matematické. Žádoucí zacházení se slovní úlohou lze tudíž označit za metakomunikační dovednost – schopnost orientace v textech slovní úlohy se žáci postupně učí na základě pochopení jejich jazykového ztvárnění (opakovaně uplatňují postupně získávané interpretační dovednosti) a v návaznosti na to se učí přiřazovat jazykově pojmenovaným obsahovým jednotkám matematické vyjádření.

Jak již bylo uvedeno, při řešení slovní úlohy dochází obecně nejprve k tvorbě situačního modelu, na jehož základě pak žáci dospívají k matematickému modelu řešení. Takové metody řešení jsou označovány *meaningful* (Hegarty, Mayer, Monk, 1995). Hejný (1995) v tomto smyslu mluví o *zmocňování se*<sup>17</sup> *úlohy s porozuměním*, Vinner (1997) o *analytickém přístupu*.

Pokud však situační model vytvořen není (podle Hejného, *ibid.*, došlo k *protetickému zmocňování se*) a žák přechází přímo k matematickému modelu, nazveme takovou strategii *povrchovou*. Povrchovou strategii použije např. žák, který úlohu řeší na základě podobnosti se známou (prototypickou úlohou) (Martin, Bassok, 2005; Fisher, Borchert, Bassok, 2011) nebo ze zadání slovní úlohy vybere čísla a snaží se na základě klíčových slov (signálů) usoudit na povahu matematického modelu. Nedochozí tedy k vytvoření situačního modelu vycházejícího z významu celého textu slovní úlohy, ale strategie je postavená na malých fragmentech textu (čísla a jednotlivá slova, která přímo na tato čísla odkazují). Tato strategie se v zahraniční literatuře nazývá *direct translation strategy* (např. Nesher, Teubal, 1975; Hegarty, Mayer, Monk, 1995) či u nás řešení založené na *signálních slovech* (Hejný, 2014: s. 117) či *strategie založená na protetickém uchopovacím procesu* (Hejný, 1995).<sup>18</sup> Podobnou situaci popisuje Vinner (1997) termínem *pseudo-analytické uvažování*. Pseudo-analytické uvažování spočívá v tom, že žák na základě určitých podobností, analogií či signálů vybere z mnohých jemu dostupných algoritmů jeden a ten použije. To ho stojí daleko menší kognitivní úsilí než přístup druhý, který, jak bylo uvedeno výše, Vinner

<sup>16</sup>U komunikační kompetence jde o kompetentní užívání a interpretaci kompetentně utvořených vět (srov. Lyons, 1977: s. 573–592). Vedle komunikační a matematické kompetence hrají ještě roli kompetence praktické, které představují nakládání s problémovými situacemi z oblastí reálného života, k nimž se vztahují matematické úlohy. Pokud se například slovní úloha zabývá rozdělováním dáreků na dětské oslavě, roste pravděpodobnost správného řešení u žáků, kteří se takových oslav zúčastnili a rozuměli explicitním či implicitním pravidlům, kterými se řídilo rozdělování dáreků. V tomto smyslu však praktické kompetence mohou být užitečné pouze v případech, kdy slovní úlohy jsou v souladu se zákovskou zkušeností. Didaktické pojetí komunikační kompetence je širší a většinou označuje široký komplex receptivních i produktivních řečových dovedností (zjednodušeně se někdy nazývají čtení, psaní, mluvení a naslouchání).

<sup>17</sup>Hejný vymezuje toto zmocňování se jako proces, který probíhá ve vědomí řešitele při vnímání textu úlohy. V terminologii, kterou používáme v knize, se jedná o tvorbu situačního modelu.

<sup>18</sup>V důsledku uplatnění této strategie mohou pak žáci mít problémy při řešení úloh s tzv. antisignálem, viz kap. 12.