UČEBNÍ TEXTY UNIVERZITY KARLOVY

TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

Petr Lachout

KAROLINUM

Teorie pravděpodobnosti

Petr Lachout

Publikace byla vydána za podpory Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy a Národního plánu obnovy v rámci projektu Transformace pro VŠ na UK (reg.č. NPO_UK_MSMT-16602/2022).

Vydala Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum
Praha 2022
Třetí vydání

ISBN 978-80-246-5399-0
ISBN 978-80-246-5430-0 online : pdf

Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Předmluva

Tento text byl napsán jako skripta Univerzity Karlovy v Praze k přednášce ***STP 050 Teorie pravděpodobnosti***, která je přednášena na Matematicko-fyzikální fakultě.

Učební látku v rozsahu uvedené přednášky obsahují kapitoly 1 až 18. Na ně navazuje kapitola 19 shrnující různé způsoby charakterizace rozdělení náhodné veličiny a kapitola 20, která připomíná některá klasická rozdělení pravděpodobnosti. K textu přednášky je připojen stručný přehled matematického aparátu, který je v přednášce používán, kapitola 23, seznam použité literatury, kapitola 24, a příklady, kapitola 25.

Text je dále rozšířen o kapitolu 21 o lokálních limitních větách, které mají široké uplatnění ve fyzice, a o kapitolu 22, obsahující důkaz Prochorovovy věty. Tyto kapitoly nejsou sice součástí výkladu přednášky ale jsou zařazeny do skript pro zúplnění jejich obsahu. Navíc technika, zde použitá, bývá předpokládána v pokročilejších kurzech teorie pravděpodobnosti.

Petr Lachout

Obsah

Použité značení

$\mathbb{N}$ ... přirozená čísla,

$\mathbb{N}_o$ ... přirozená čísla s nulou,

$\mathbb{Q}$ ... racionální čísla,

$\mathbb{Z}$ ... celá čísla,

$\mathbb{R}$ ... reálná přímka,

$\mathbb{R}_+$ ... nezáporná reálná čísla,

$\overline{\mathbb{R}}$ ... rozšířená reálná přímka,

$\mathbb{C}$ ... komplexní čísla,

$\mathbb{B}$ ... borelovská σ-algebra reálné přímky,

$\mathbb{B}^k$ ... borelovská σ-algebra $\mathbb{R}^k$,

$\overline{\mathbb{B}}$ ... borelovská σ-algebra rozšířené reálné přímky,

$\mathbb{B}(E)$ ... borelovská σ-algebra metrického prostoru E,

$\mathcal{G}(E)$ ... množina všech otevřených množin metrického prostoru E,

$\mathcal{F}(E)$ ... množina všech uzavřených množin metrického prostoru E,

$\mathcal{K}(E)$ ... množina všech kompaktních množin metrického prostoru E,

$\mathbb{I}_A$ ... identifikátor množiny, jevu,

Id_E ... identita na množině E,

$\mathsf{clo}\,(A)$ ... uzávěr množiny A,

$\mathsf{int}\,(A)$ ... vnitřek množiny A,

$\partial(A)$ ... hranice množiny A,

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ... označuje skalární součin vektorů v $\mathbb{R}^k$,

$|\cdot|$ ... absolutní hodnota,

$\|\cdot\|$ ... euklidovská délka vektoru v $\mathbb{R}^k$,

x', A' ... transpozice vektoru, matice.

1. Axiomatická definice pravděpodobnosti

Teorie pravděpodobnosti se zabývá studiem náhodných jevů a jejich limitním chováním. Vytváří tak nástroje pro matematickou statistiku, ekonometrii a ostatní vědní obory, které zpracovávají empirická data a řeší praktické problémy a úlohy. Abychom mohli popisovat nejen konkrétní náhodný pokus, ale též i jeho limitní chování, zavádíme následující pojem pravděpodobnostního prostoru.

Definice 1.1 (A.N. Kolmogorov 1933): *Trojici $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ nazýváme <u>pravděpodobnostní prostor</u>, jestliže Ω je neprázdná množina, $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ je σ-algebra a P je míra na $\mathcal{A}$, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.*

Standardní terminologie: $\omega \in \Omega$ - elementární jev, $A \in \mathcal{A}$ - náhodný jev, P - pravděpodobnostní míra, $\mathsf{P}(A)$ - pravděpodobnost náhodného jevu A, $\emptyset$ - nemožný jev, Ω - jistý jev.
Říkáme, že dva náhodné jevy A, B jsou neslučitelné, když $A \cap B = \emptyset$.

Pro praktické účely jsou důležité dva základní typy pravděpodobnostních prostorů.

Příklad 1.2: Množina Ω je nejvýše spočetná. Zde není problému s volbou σ-algebry $\mathcal{A}$. Volíme ji přímo jako $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$. Pravděpodobnostní míra P je pak určena pravděpodobnostmi elementárních jevů, tj.

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \text{ pro každé } A \in \mathcal{A} ,$$

kde $0 \leq p(\omega) \leq 1$ pro $\omega \in \Omega$ a $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.
Takový pravděpodobnostní prostor nazýváme <u>*diskrétním pravděpodobnostním prostorem*</u>.

$\triangle$

Příklad 1.3: $\Omega \in \mathbb{B}^k$, $\mathcal{A} = \mathbb{B}^k \cap \Omega = \left\{A \in \mathbb{B}^k : A \subset \Omega\right\}$ a pravděpodobnostní míra P je generována <u>*hustotou*</u> pravděpodobnosti $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, tj. $f \geq 0$ je lebesgueovsky integrovatelná funkce a $\int_{\Omega} f(\omega)\, \mathsf{d}\omega = 1$, předpisem

$$\mathsf{P}(A) = \int_A f(\omega)\, \mathsf{d}\omega \text{ pro každé } A \in \mathcal{A}.$$

Takový pravděpodobnostní prostor nazýváme <u>*spojitým pravděpodobnostním prostorem*</u>.

$\triangle$

Pravděpodobnostní prostor je vlastně pouze pomocný objekt. Naše znalosti a pozorování modelujeme pomocí náhodných veličin.

Definice 1.4: *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor a $(E, \mathcal{E})$ je měřitelný prostor. Budeme říkat, že zobrazení $X : \Omega \to E$ je <u>náhodná veličina</u> (dále jen <u>n.v.</u>) s hodnotami v $(E, \mathcal{E})$, jestliže je měřitelná, tj.*

$$[X \in B] := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}B \in \mathcal{A} \textit{ pro každé } B \in \mathcal{E} .$$

Tento fakt budeme vyznačovat zápisem $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$.

Definice 1.5: *Je-li X n.v. s hodnotami v $(E, \mathcal{E})$, pak zavádíme pojem <u>rozdělení</u> (pravděpodobnosti) n.v. X jako pravděpodobnostní míru P_X definovanou na $\mathcal{E}$ předpisem $\mathsf{P}_X(B) = \mathsf{P}(X \in B) := \mathsf{P}([X \in B])$ pro $B \in \mathcal{E}$.*

Jiné používané značení je $\mathsf{P}_X = \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \,|\, \mathsf{P})$.

Lemma 1.6: Když X je n.v. s hodnotami v $(E, \mathcal{E})$, pak $(E, \mathcal{E}, \mathsf{P}_X)$ je pravděpodobnostní prostor.

Důkaz lemmatu je ponechán na čtenáři.

Úmluva 1.7: *Pro n.v. X s hodnotami v $(E, \mathcal{E})$ zavedeme následující terminologii:*

i) *Je-li $(E, \mathcal{E}, \mathsf{P}_X)$ diskrétní pravděpodobnostní prostor, pak říkáme, že n.v. X má <u>diskrétní</u> rozdělení.*

ii) *Je-li $(E, \mathcal{E}, \mathsf{P}_X)$ spojitý pravděpodobnostní prostor, pak říkáme, že n.v. X má <u>spojité</u> rozdělení. (Musí být $E \in \mathbb{B}^k$ a $\mathcal{E} = \mathbb{B}^k \cap E$.)*

iii) *Budeme říkat, že $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)'$ je (k-rozměrný) <u>náhodný vektor</u>, je-li n.v. s hodnotami v $\left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{k} E_i, \bigotimes\limits_{i=1}^{k} \mathcal{E}_i \right)$.*

iv) *Budeme říkat, že $X = (X_i, i \in \mathbb{N})$ je <u>náhodná posloupnost</u>, je-li n.v. s hodnotami v $\left(\mathop{\times}\limits_{i \in \mathbb{N}} E_i, \bigotimes\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_i \right)$.*

v) *Budeme říkat, že $X = (X_t, t \in T)$ je <u>náhodný proces</u> indexovaný T, je-li n.v. s hodnotami v $\left(\mathop{\times}\limits_{t \in T} E_t, \bigotimes\limits_{t \in T} \mathcal{E}_t \right)$.*

vi) *Budeme říkat, že X je <u>reálná n.v.</u>, je-li n.v. s hodnotami v $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$.*

vii) *Budeme říkat, že $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)'$ je (k-rozměrný) <u>reálný náhodný vektor</u>, je-li n.v. s hodnotami v $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}^k)$ pro nějaké přirozené číslo k.*

viii) *Budeme říkat, že $X = (X_i, i \in \mathbb{N})$ je <u>reálná náhodná posloupnost</u>, je-li n.v. s hodnotami v $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{B}^{\mathbb{N}}\right)$.*

ix) *Budeme říkat, že $X = (X_t, t \in T)$ je <u>reálný náhodný proces indexovaný T</u>, je-li n.v. s hodnotami v $\left(\mathbb{R}^T, \mathbb{B}^T\right)$.*

x) *Budeme říkat, že X je <u>zobecněná reálná n.v.</u>, je-li n.v. s hodnotami v $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$.*

xi) *Budeme říkat, že X je <u>komplexní n.v.</u>, je-li n.v. s hodnotami v $(\mathbb{C}, \mathbb{B}(\mathbb{C}))$.*

V úmluvě používáme součinové σ-algebry. Definice tohoto součinu je uvedena v dodatcích jako A.10.

Každá n.v. má své rozdělení pravděpodobnosti. Můžeme se ptát, zda ke každé pravděpodobnostní míře existuje n.v., která ji má jako své rozdělení. Odpověď je kladná.

Věta 1.8: Nechť $(E, \mathcal{E}, \mu)$ je pravděpodobnostní prostor. Potom existuje n.v. X taková, že její rozdělení je $\mathsf{P}_X = \mu$.

Důkaz: Položme $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}) = (E, \mathcal{E}, \mu)$ a $X = \mathsf{Id}_E$.
Pro $B \in \mathcal{E}$ dostáváme $\mathsf{P}_X(B) = \mathsf{P}(X \in B) = \mathsf{P}(B) = \mu(B)$.

Q.E.D.

Konstrukce použitá v důkazu věty se nazývá <u>*kanonická konstrukce n.v.*</u>

Rozdělení pravděpodobnosti často se vyskytující v praxi mají své ustálené názvy, viz kapitola 20.

2. Měřitelnost kolekce náhodných veličin

Sdružíme-li indexované náhodné veličiny, automaticky dostáváme náhodný proces.

Věta 2.1: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $T \neq \emptyset$ a nechť pro $t \in T$ jsou $E_t = (E_t, \mathcal{E}_t)$ měřitelné prostory. Když $X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E_t, \mathcal{E}_t)$ jsou n.v. pro každé $t \in T$, potom $(X_t, t \in T)$ je náhodný proces s hodnotami v $\left(\mathop{\mathsf{X}}_{t \in T} E_t, \bigotimes_{t \in T} \mathcal{E}_t \right)$.

Důkaz: Potřebujeme ověřit správnou měřitelnost kolekce n.v. $(X_t, t \in T)$. Definujme proto množinu

$$\mathcal{M} = \left\{ B \in \bigotimes_{t \in T} \mathcal{E}_t \; : \; [(X_t, t \in T) \in B] \in \mathcal{A} \right\} .$$

1. Ověříme, že $\mathcal{M}$ je σ-algebra.
   (a) $\mathop{\mathsf{X}}_{t \in T} E_t \in \mathcal{M}$, protože $\left[(X_t, t \in T) \in \mathop{\mathsf{X}}_{t \in T} E_t \right] = \Omega \in \mathcal{A}$.
   (b) Když $A \in \mathcal{M}$, potom $\left[(X_t, t \in T) \in \mathop{\mathsf{X}}_{t \in T} E_t \setminus A \right] = \Omega \setminus [(X_t, t \in T) \in A] \in \mathcal{A}$.
   Proto také $\mathop{\mathsf{X}}_{t \in T} E_t \setminus A \in \mathcal{M}$.
   (c) Když $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, potom platí
   $$\left[(X_t, t \in T) \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [(X_t, t \in T) \in A_n] \in \mathcal{A} .$$
   Proto také $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.
2. Ukážeme, že $\mathcal{M}$ obsahuje všechny konečněrozměrné obdélníky
   Pro konečně indexů $t_1, t_2, \ldots, t_k \in T$ a množiny $B_t \in \mathcal{E}_t$ pro každé $t \in T$ takové, že $B_t = E_t$ pokud $t \notin \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$, platí
   $$\left[(X_t, t \in T) \in \mathop{\mathsf{X}}_{t \in T} B_t \right] = \bigcap_{i=1}^{k} [X_{t_i} \in B_{t_i}] \in \mathcal{A} .$$
   Tedy $\mathcal{M}$ obsahuje všechny konečněrozměrné obdélníky.

Z definice součinu σ-algeber, viz A.10, vyplývá, že

$$\bigotimes_{t \in T} \mathcal{E}_t = \sigma\left(\left\{ \mathop{\mathsf{X}}_{t \in T} B_t \; : \; B_t \in \mathcal{E}_t \text{ pro každé } t \in T \text{ a } B_t = E_t \text{ až na konečně } t \in T \right\} \right) = \mathcal{M} .$$

Sledovaná kolekce n.v. je správně měřitelná.

Q.E.D.

Speciálně dostáváme měřitelnost náhodného vektoru a náhodné posloupnosti.

Věta 2.2: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor a $k \in \mathbb{N}$. Nechť pro $i = 1, 2, \ldots, k$ jsou dány $E_i = (E_i, \mathcal{E}_i)$ měřitelné prostory a $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E_i, \mathcal{E}_i)$ n.v. Potom $(X_1, X_2, \ldots, X_k)'$ je náhodný vektor s hodnotami v $\left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{k} E_i, \bigotimes_{i=1}^{k} \mathcal{E}_i \right)$.

Důkaz: Věta je speciálním případem věty 2.1. Stačí položit $T := \{1, 2, \ldots, k\}$.

Q.E.D.

Věta 2.3: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor a nechť pro každé $i \in \mathbb{N}$ jsou $E_i = (E_i, \mathcal{E}_i)$ měřitelné prostory a $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E_i, \mathcal{E}_i)$ n.v. Potom $(X_i, i \in \mathbb{N})$ je náhodná posloupnost s hodnotami v $\left(\bigtimes_{i\in\mathbb{N}} E_i, \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_i\right)$.

Důkaz: Věta je speciálním případem věty 2.1. Stačí položit $T := \mathbb{N}$.

Q.E.D.

Později se budeme zajímat o asymptotické vlastnosti posloupnosti náhodných veličin a o různé typy konvergencí. Budeme proto potřebovat topologickou strukturu na množině hodnot, které náhodné veličiny nabývají. Měřitelnost pak musíme vyžadovat vzhledem k borelovské σ-algebře součinového prostoru, která však je obecně podstatně větší než součin borelovských σ-algeber. Naštěstí pro separabilní metrické prostory je zaručena rovnost mezi těmito dvěma σ-algebrami.

Věta 2.4: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor a pro $i = 1, 2, \ldots, k$ jsou $E_i = (E_i, d_i)$ separabilní metrické prostory a $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to \Big(E_i, \mathbb{B}(E_i)\Big)$ n.v. Potom $(X_1, X_2, \ldots, X_k)'$ je náhodný vektor s hodnotami v $\left(\bigtimes_{i=1}^{k} E_i, \mathbb{B}\left(\bigtimes_{i=1}^{k} E_i\right)\right)$ a $\mathbb{B}\left(\bigtimes_{i=1}^{k} E_i\right) = \bigotimes_{i=1}^{k} \mathbb{B}(E_i)$.

Důkaz: Přímý důsledek věty 2.2 a věty C.13 z dodatků.

Q.E.D.

Věta 2.5: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor a pro $i \in \mathbb{N}$ jsou $E_i = (E_i, d_i)$ separabilní metrické prostory a $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to \Big(E_i, \mathbb{B}(E_i)\Big)$ n.v. Potom $(X_i, i \in \mathbb{N})$ je náhodná posloupnost s hodnotami v $\left(\bigtimes_{i=1}^{+\infty} E_i, \mathbb{B}\left(\bigtimes_{i=1}^{+\infty} E_i\right)\right)$ a $\mathbb{B}\left(\bigtimes_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \bigotimes_{i=1}^{+\infty} \mathbb{B}(E_i)$.

Důkaz: Přímý důsledek věty 2.3 a věty C.13 z dodatků.

Q.E.D.

Pro bohatší indexové množiny se však již součinová a borelovská σ-algebra mohou podstatně lišit. Tvrzení proto obecně neplatí pro procesy.

Reálná přímka je separabilním metrickým prostorem. Proto reálné náhodné posloupnosti a vektory jsou borelovsky měřitelné, jakmile mají měřitelné složky.

3. Distribuční funkce

Ke stanovení rozdělení n.v. stačí znát pravděpodobnostní míru P pouze na speciální σ-algebře.

Definice 3.1: *Nechť X je n.v. s hodnotami v $(E, \mathcal{E})$ definovaná na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Pak σ-algebru $\sigma(X) = \{[X \in B] : B \in \mathcal{E}\}$ nazýváme σ-algebrou generovanou n.v. X.*

Poznámka 3.2:

i) $\left(\Omega, \sigma(X), \mathsf{P}/_{\sigma(X)}\right)$ *je pravděpodobnostní prostor.*

ii) *Pro náhodný vektor* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)'$ *platí* $\sigma(X) = \sigma(\sigma(X_1) \cup \sigma(X_2) \cup \ldots \cup \sigma(X_k))$.

iii) *Pro náhodnou posloupnost* $X = (X_i, i \in \mathbb{N})$ *platí* $\sigma(X) = \sigma\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \sigma(X_i)\right)$.

iv) *Pro náhodný proces* $X = (X_t, t \in T)$ *platí* $\sigma(X) = \sigma\left(\bigcup_{t\in T} \sigma(X_t)\right)$.

Důkaz:

1. Systém množin $\sigma(X)$ je evidentně σ-algebra, a proto $\left(\Omega, \sigma(X), \mathsf{P}/_{\sigma(X)}\right)$ tvoří pravděpodobnostní prostor.
2. Stačí ukázat charakterizaci σ-algebry generované procesem. Zbylá tvrzení jsou speciálním případem tohoto tvrzení.

   Inkluze $\sigma(X) \supset \sigma\left(\bigcup_{t\in T} \sigma(X_t)\right)$ je zřejmá. Musíme ukázat pouze opačnou inkluzi.

   Definujme množinu
   $$\mathcal{M} = \left\{ B \in \bigotimes_{t\in T} \mathcal{E}_t \;:\; [X \in B] \in \sigma\left(\bigcup_{t\in T} \sigma(X_t)\right)\right\}.$$
   Evidentně, $\mathcal{M}$ je σ-algebra. Stačí ověřit, že obsahuje generátor součinové σ-algebry.

   Vezměme konečněrozměrné obdélníky $B = \mathop{\times}_{t\in T} B_t$, kde $B_t \in \mathcal{E}_t$ pro každé $t \in T$ a $B_t \neq E_t$ pouze pro konečně $t \in T$. Označme tyto indexy $t_1, t_2, \ldots, t_n$, kde n je jejich počet. Potom
   $$[X \in B] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_{t_i} \in B_{t_i}] \in \sigma\left(\bigcup_{t\in T} \sigma(X_t)\right).$$
   Systém množin $\mathcal{M}$ je σ-algebra, která obsahuje všechny konečněrozměrné obdélníky.

   Proto $\mathcal{M} = \bigotimes_{t\in T} \mathcal{E}_t = \mathcal{E}$ a z této rovnosti vyplývá, že $\sigma(X) \subset \sigma\left(\bigcup_{t\in T} \sigma(X_t)\right)$.

Q.E.D.

Příklad 3.3: Nechť n.v. X nabývá spočetně mnoha hodnot v $(E, \mathcal{E})$, označme je $x_i, i \in \mathbb{N}$. Položíme-li $p_i = \mathsf{P}(X = x_i)$, $i \in \mathbb{N}$, pak X má rozdělení
$$\mathsf{P}_X(B) = \mathsf{P}(X \in B) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i \mathbb{I}_{x_i \in B} \text{ pro každé } B \in \mathcal{E}.$$
Jinak řečeno
$$\mathsf{P}_X = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i \varepsilon_{x_i}, \text{ kde } \varepsilon_y(B) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } y \in B, \\ 0 & \text{pokud } y \notin B. \end{cases}$$

N.v. X generuje σ-algebru

$$\sigma(X) = \sigma(\{[X = x_i] \, : \, i \in \mathbb{N}\}) = \left\{ \bigcup_{j \in J} [X = x_j] \, : \, J \subset \mathbb{N} \right\} .$$

$\triangle$

Příklad 3.4: Nechť $X = (X_1, X_2)$ je reálný náhodný vektor se spojitým rozdělením a s hustotou $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pak platí

$$\mathsf{P}_X(B) = \int_B f(x_1, x_2) \, \mathsf{d}x_1 \, \mathsf{d}x_2 \text{ pro všechna } B \in \mathbb{B}^2 .$$

Spočtěme si marginální rozdělení, tj. rozdělení n.v. X_1 a X_2. Vezměme $B \in \mathbb{B}$ a počítejme

$$\mathsf{P}_{X_1}(B) = \mathsf{P}(X_1 \in B) = \mathsf{P}\Big((X_1, X_2) \in B \times \mathbb{R} \Big) = \mathsf{P}_X(B \times \mathbb{R}) =$$

$$= \int_{B \times \mathbb{R}} f(x_1, x_2) \, \mathsf{d}x_1 \, \mathsf{d}x_2 = \int_B \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) \, \mathsf{d}x_2 \right) \mathsf{d}x_1$$

podle Fubiniho věty, neboť $f \geq 0$. Tudíž n.v. X_1 má spojité rozdělení s hustotou

$$f_1(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, \mathsf{d}y & \text{pokud integrál existuje a je konečný,} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a n.v. X_2 má spojité rozdělení s hustotou

$$f_2(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, x) \, \mathsf{d}y & \text{pokud integrál existuje a je konečný,} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} .$$

A jak je to s generovanými σ-algebrami?

$$\begin{aligned} \sigma(X) = \ & \{[X \in B] \, : \, B \in \mathbb{B}\} = \sigma(\{[a_1 < X_1 < b_1] \cap [a_2 < X_2 < b_2] \, : \, a_1 < b_1, a_2 < b_2\}) \\ & \qquad\qquad\qquad\quad = \sigma(\{[X_1 < b_1] \cap [X_2 < b_2] \, : \, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\}) , \\ \sigma(X_1) = \ & \{[X_1 \in B] \, : \, B \in \mathbb{B}\} = \sigma(\{[a < X_1 < b] \, : \, a < b, a, b \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[X_1 < b] \, : \, b \in \mathbb{R}\}) , \\ \sigma(X_2) = \ & \{[X_2 \in B] \, : \, B \in \mathbb{B}\} = \sigma(\{[a < X_2 < b] \, : \, a < b, a, b \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[X_2 < b] \, : \, b \in \mathbb{R}\}) . \end{aligned}$$

$\triangle$

Rozdělení reálného náhodného vektoru lze charakterizovat pomocí jeho distribuční funkce.

Definice 3.5: *Nechť $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)'$ je reálný náhodný vektor. Pak definujeme funkci*

$$\mathsf{F}_X(x_1, x_2, \ldots, x_k) := \mathsf{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_k < x_k) = \mathsf{P}_X \left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{k} (-\infty, x_i) \right)$$

pro každé $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ a budeme ji nazývat <u>distribuční funkce</u> (dále <u>d.f.</u>) reálného náhodného vektoru X.

Věta 3.6: Rozdělení reálného náhodného vektoru je jednoznačně určeno jeho distribuční funkcí.

Důkaz: Nechť $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)'$ a $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)'$ jsou dva reálné náhodné vektory. Mají-li tyto vektory shodné rozdělení, pak přímo z definice vidíme, že se jejich d.f. shodují. Zbývá ukázat opačnou implikaci.

Předpokládejme, že $\mathsf{F}_X = \mathsf{F}_Y$ a označme $\mathcal{M} = \left\{B \in \mathbb{B}^k : \mathsf{P}_X(B) = \mathsf{P}_Y(B)\right\}$. Naším cílem je ukázat, že $\mathcal{M} = \mathbb{B}^k$.
Z rovnosti $\mathsf{F}_X = \mathsf{F}_Y$ vyplývá, že

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathop{\times}_{i=1}^{k} (-\infty, b_i) \, : \, b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M} \, .$$

Ještě ověříme, že $\mathcal{M}$ je Dynkinův systém, definice je uvedena v dodatcích ve větě A.8.

1. $\mathbb{R}^k \in \mathcal{M}$, protože $\mathsf{P}_X\left(\mathbb{R}^k\right) = \mathsf{P}_Y\left(\mathbb{R}^k\right) = 1$.
2. Když $A, B \in \mathcal{M}$ a $A \supset B$ pak platí

   $$\mathsf{P}_X(A \setminus B) = \mathsf{P}_X(A) - \mathsf{P}_X(B) = \mathsf{P}_Y(A) - \mathsf{P}_Y(B) = \mathsf{P}_Y(A \setminus B) \, .$$

   Potom $A \setminus B \in \mathcal{M}$.
3. Když $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou po dvou disjunktní, pak

   $$\mathsf{P}_X\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}_X(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{P}_Y(A_n) = \mathsf{P}_Y\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \, .$$

   Potom $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

$\mathcal{S}$ je uzavřeno na konečné průniky, a tak $\mathcal{M} \supset \sigma(\mathcal{S}) = \mathbb{B}^k$ podle věty A.8.

Q.E.D.

Úmluva 3.7: *Pro porovnávání dvou vektorů po složkách, případně složek vektoru a čísla, budeme používat symbolů* $<$, $>$, $\leq$ *a* $\geq$. *Pro posloupnost vektorů* $x^n \in \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}$ *a vektor* $x \in \mathbb{R}^k$ *budeme jejich konvergenci po složkách označovat* $x^n \to x$.

Distribuční funkce umíme jednoznačně charakterizovat.

Definice 3.8: *Budeme říkat, že funkce* $F : \mathbb{R}^k \to [0, 1]$ *je* DF_k*-funkce, jestliže je splněno:*

i) *Pro každé* $x \in \mathbb{R}^k$ *existuje posloupnost bodů* $x^n \in \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}$ *taková, že* $x^n < x$, $x^n \to x$ *a platí* $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x^n) = F(x)$.

ii) *Existuje posloupnost bodů* $\hat{x}^n \in \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}$ *takových, že* $\hat{x}^n \to (+\infty, +\infty, \ldots, +\infty)'$ *a platí* $\lim\limits_{n \to +\infty} F(\hat{x}^n) = 1$.

iii) *Pro každý index* $i = 1, 2, ..., k$ *a každý bod* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)' \in \mathbb{R}^k$ *platí*

$$\lim_{y \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_k) = 0 \, .$$

iv) *Pro každou dvojici vektorů* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)'$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)' \in \mathbb{R}^k$, $x < y$ *platí*

$$\sum_{\substack{\delta_1 \in \{x_1, y_1\} \\ \delta_2 \in \{x_2, y_2\} \\ \cdots\cdots \\ \delta_k \in \{x_k, y_k\}}} (-1)^{\mathsf{card}(\{i \, : \, \delta_i = x_i\})} F(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k) \geq 0 \, .$$

(význam podmínky je, že „míra“ obdélníku $[x, y) = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{k} [x_i, y_i)$ *je nezáporná.)*

Nejdříve rozšíříme DF_k-funkci i pro hodnoty $+\infty$, $-\infty$ a budeme její pomocí „měřit“ obdélníky.

Definice 3.9: *Pro každou funkci $F : \mathbb{R}^k \to [0,1]$ definujeme funkci $\tilde{F} : \overline{\mathbb{R}}^k \to [0,1]$ a množinovou funkci μ_F předpisem*

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \sup\{F(y) \,:\, y < x, y \in \mathbb{R}^k\} & \text{pokud } x > -\infty, \\ 0 & \text{v opačném případě}, \end{cases}$$

$$\mu_F\left(\bigtimes_{i=1}^{k} [a_i, b_i)\right) = \sum_{\substack{\delta_1 \in \{x_1, y_1\} \\ \delta_2 \in \{x_2, y_2\} \\ \cdots\cdots \\ \delta_k \in \{x_k, y_k\}}} (-1)^{\mathsf{card}(\{i \,:\, \delta_i = a_i\})} \tilde{F}\left(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k\right)$$

pro každé $a, b, x \in \overline{\mathbb{R}}^k$, $a < b$.

Funkce μ_F má následující důležitou vlastnost.

Lemma 3.10: Nechť $F : \mathbb{R}^k \to [0,1]$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}^k$, $a < b$ a $a^j, b^j \in \overline{\mathbb{R}}^k$, $a^j < b^j$ pro $j = 1, 2, \ldots, J$, $J \in \mathbb{N}$. Když $\bigtimes_{i=1}^{k} [a_i, b_i) = \bigcup_{j=1}^{J} \bigtimes_{i=1}^{k} \left[a_i^j, b_i^j\right)$ a $\bigtimes_{i=1}^{k} \left[a_i^j, b_i^j\right) \cap \bigtimes_{i=1}^{k} [a_i^s, b_i^s) = \emptyset$ kdykoli $j \neq s$, potom

$$\mu_F\left(\bigtimes_{i=1}^{k} [a_i, b_i)\right) = \sum_{j=1}^{J} \mu_F\left(\bigtimes_{i=1}^{k} [a_i^j, b_i^j)\right) .$$

Důkaz: Stačí si uvědomit, že pro „pravidelné“ dělení tvrzení platí. Pro každou souřadnici uvažujme dělení příslušného intervalu $a_i = \alpha_i^0 < \alpha_i^1 < \ldots \alpha_i^{n_i} = b_i$, pak platí

$$\sum_{j_1=0}^{n_1-1} \sum_{j_2=0}^{n_2-1} \cdots \sum_{j_k=0}^{n_k-1} \mu_F\left(\bigtimes_{i=1}^{k} \left[\alpha_i^{j_i}, \alpha_i^{j_i+1}\right)\right) =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \sum_{j_2=0}^{n_2-1} \cdots \sum_{j_k=0}^{n_k-1} \sum_{\substack{\delta_1 \in \left\{\alpha_1^{j_1}, \alpha_1^{j_1+1}\right\} \\ \delta_2 \in \left\{\alpha_2^{j_2}, \alpha_2^{j_2+1}\right\} \\ \cdots\cdots \\ \delta_k \in \left\{\alpha_k^{j_k}, \alpha_k^{j_k+1}\right\}}} (-1)^{\mathsf{card}\left(\left\{i \,:\, \delta_i = \alpha_i^{j_i}\right\}\right)} \tilde{F}\left(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k\right) =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} \sum_{\substack{\delta_1 \in \left\{\alpha_1^{j_1}, \alpha_1^{j_1+1}\right\} \\ \delta_2 \in \left\{\alpha_2^{j_2}, \alpha_2^{j_2+1}\right\} \\ \cdots\cdots \\ \delta_{k-1} \in \left\{\alpha_{k-1}^{j_{k-1}}, \alpha_{k-1}^{j_{k-1}+1}\right\}}} (-1)^{\mathsf{card}\left(\left\{i \leq k-1 \,:\, \delta_i = \alpha_i^{j_i}\right\}\right)} \times$$

$$\times \sum_{j_k=0}^{n_k-1} \left(\tilde{F}\left(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k-1}, \alpha_k^{j_k+1}\right) - \tilde{F}\left(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k-1}, \alpha_k^{j_k}\right)\right) =$$

$$\sum_{j_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} \sum_{\substack{\delta_1 \in \left\{\alpha_1^{j_1}, \alpha_1^{j_1+1}\right\} \\ \delta_2 \in \left\{\alpha_2^{j_2}, \alpha_2^{j_2+1}\right\} \\ \cdots\cdots \\ \delta_{k-1} \in \left\{\alpha_{k-1}^{j_{k-1}}, \alpha_{k-1}^{j_{k-1}+1}\right\}}} (-1)^{\mathsf{card}\left(\left\{i \leq k-1 \,:\, \delta_i = \alpha_i^{j_i}\right\}\right)} \times$$

$$\times \left(\tilde{F}\left(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k-1}, b_k\right) - \tilde{F}\left(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k-1}, a_k\right)\right) =$$

$$\sum_{j_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} \sum_{\substack{\delta_1 \in \left\{\alpha_1^{j_1}, \alpha_1^{j_1+1}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{k-1} \in \left\{\alpha_{k-1}^{j_{k-1}}, \alpha_{k-1}^{j_{k-1}+1}\right\} \\ \delta_k \in \{a_k, b_k\}}} (-1)^{\mathsf{card}\left(\left\{i \le k-1 \,:\, \delta_i = \alpha_i^{j_i}\right\}\right) + \mathbb{I}_{[\delta_k = a_k]}} \tilde{F}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k) =$$

$$= \ldots = \sum_{\substack{\delta_1 \in \{a_1, b_1\} \\ \delta_2 \in \{a_2, b_2\} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_k \in \{a_k, b_k\}}} (-1)^{\mathsf{card}(\{i \,:\, \delta_i = a_i\})} \tilde{F}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k) = \mu_F\left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{k} [a_i, b_i)\right).$$

Q.E.D.

Je-li F DF_k-funkce, pak je $\tilde{F}$ opravdu jejím rozšířením a má následující vlastnosti.

Věta 3.11: Když $F : \mathbb{R}^k \to [0,1]$ je DF_k-funkce, pak pro $\tilde{F}$ platí:

i) Pro každé $x \in \mathbb{R}^k$ je $\tilde{F}(x) = F(x)$.

ii) Pro každé $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^k$, $x \le y$ je $\tilde{F}(x) \le \tilde{F}(y)$.

iii) Pro každé $x \in \overline{\mathbb{R}}^k$ je $\lim_{\substack{y \to x \\ y \le x}} \tilde{F}(y) = \tilde{F}(x)$.

iv) $\tilde{F}(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty) = 1$.

v) Když $x \in \overline{\mathbb{R}}^k$ a alespoň pro jeden index i je $x_i = -\infty$, potom $\tilde{F}(x) = 0$.

vi) Je splněna limita

$$\lim_{t \to -\infty} \sup\left\{\tilde{F}(y) \,:\, \min\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \le t, y \in \overline{\mathbb{R}}^k\right\} = 0.$$

vii) Pro každé $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^k$, $x < y$ je $\mu_F\left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{k} [x_i, y_i)\right) \ge 0$.

Důkaz:

1. <u>*Ukážeme monotonii $\tilde{F}$, tj. vlastnost (ii).*</u>
   Přímo z definice 3.9 plyne, že když $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^k$, $x \le y$, potom $\tilde{F}(x) \le \tilde{F}(y)$. Je to proto, že je buď levá strana nulová nebo že $\tilde{F}(y)$ je supremum přes větší množinu než $\tilde{F}(x)$.

2. <u>*Ukážeme spojitost „zdola" funkce $\tilde{F}$, tj. vlastnost (iii).*</u>
   Nechť $x \in \overline{\mathbb{R}}^k$.
   Když $x_i = -\infty$ pro některé i, pak $\tilde{F}(x) = 0$. Z monotonie $\tilde{F}$ ihned dostaneme $\lim_{\substack{y \to x \\ y \le x}} \tilde{F}(y) = \tilde{F}(x)$.

   Když $-\infty < x$, pak pro $\varepsilon > 0$ existuje z definice 3.9 bod $y \in \mathbb{R}^k$ takový, že $y < x$ a $F(y) > \tilde{F}(x) - \varepsilon$. Podle definice 3.9 a z monotónie funkce $\tilde{F}$ dostáváme

   $$\tilde{F}(x) \ge \limsup_{\substack{z \to x \\ z \le x}} \tilde{F}(z) \ge \liminf_{\substack{z \to x \\ z \le x}} \tilde{F}(z) \ge \tilde{F}(y) \ge F(y) > \tilde{F}(x) - \varepsilon.$$

   Jelikož ε může být libovolně malé, je již vlastnost (iii) ověřena pro $-\infty < x$. Zbývá si jen uvědomit, že ve zbývajících případech je pravá i levá strana (iii) nulová přímo z definice 3.9 a rovnost je triviální.