PETR KŮRKA

PROSTORY A GEOMETRIE

OD EUKLEIDA K EINSTEINOVI

KAROLINUM

Prostory a geometrie
Od Eukleida k Einsteinovi

Petr Kůrka

Ivanu Chvatíkovi, který dovede klást znepokojující a neodbytné otázky.

Recenzovali:
prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.
doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.

Financováno Evropskou unií
NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Publikace byla vydána za podpory Ministerstva školství, mládeže
a tělovýchovy a Národního plánu obnovy v rámci projektu
Transformace pro VŠ na UK (reg.č. NPO_UK_MSMT-16602/2022).

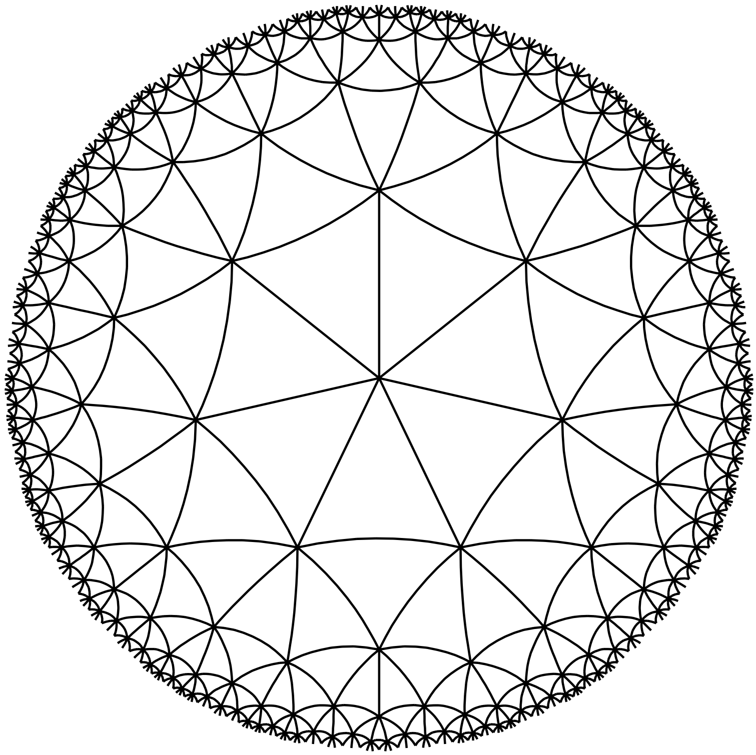
Vydala Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum
Praha 2023
Jazyková korektura Vendula Kadlečková
Grafická úprava Jan Šerých
Sazba Petr Kůrka
Vydání první

Na obálce je znázornění teselace hyperbolické roviny rovnostrannými trojúhelníky
s úhly $2\pi/7$ (odstavec 9.5)

ISBN 978-80-246-5564-2
ISBN 978-80-246-5568-0 (pdf)

Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz



Obsah

Předmluva **9**

1 Fenomén prostoru **11**

1.1 Eukleidovská geometrie 13
1.2 Sférická geometrie 15
1.3 Newtonův absolutní prostor a čas 17
1.4 Projektivní geometrie 18
1.5 Neeukleidovské geometrie 19
1.6 Gaussova geometrie ploch 20
1.7 Riemannova geometrie 21
1.8 Einsteinův prostoročas 22

2 Eukleidovská geometrie **23**

2.1 Eukleidovy *Základy* 23
2.2 Aditivní veličiny 31
2.3 Trigonometrie 34
2.4 Analytická geometrie 35
2.5 Vektory 37
2.6 Stereometrie 41
2.7 Axiomatika elementární geometrie 42
2.8 Tarského axiomatika 46
2.9 Geometrické vztahy a objekty 49
2.10 Souřadná soustava 51

3 Neeukleidovské geometrie **53**

3.1 Sférická geometrie 53
3.2 Důkazy pátého postulátu 58
3.3 Hyperbolická geometrie 61
3.4 Eliptická geometrie 63

4 Projektivní rovina **65**
4.1 Desargueova věta 67
4.2 Pascalova věta 70
4.3 Projektivní přímka 71
4.4 Topologie projektivní roviny 72
4.5 Axiomatika projektivní roviny 74
4.6 Incidence 75
4.7 Usměrněné posloupnosti 81
4.8 Korespondence a projektivity 84
4.9 Aritmetika 91
4.10 Uspořádání 96
4.11 Dvojpoměr 97
4.12 Möbiovské transformace 99
4.13 Souřadná soustava 100

5 Projektivní prostory **105**
5.1 Projektivní souřadnice 107
5.2 Projektivní zobrazení 108
5.3 Kolineace 110
5.4 Projektivní korelace 112
5.5 Projektivní polarity 114

6 Homogenní geometrie **121**
6.1 Geometrie projektivní přímky 123
6.1.1 Metriky projektivní přímky 125
6.1.2 Hyperbolická geometrie 128
6.1.3 Eliptická geometrie 130
6.2 Rovinná afinní geometrie 131
6.2.1 Podobnosti 133
6.2.2 Shodnosti 133
6.2.3 Dilatace 134
6.2.4 Translace 135
6.3 Hyperbolická geometrie 135
6.4 Hyperbolická trigonometrie 141
6.5 Eliptická geometrie 143

7 Gaussova geometrie ploch **147**
7.1 Rovinné křivky 147
7.2 Prostorové křivky 151
7.3 Regulární plochy 154
7.4 Metrický tenzor 155
7.5 Druhá fundamentální forma 157
7.6 Gaussova křivost 159
7.7 Gaussovy a Weingartenovy rovnice 161
7.8 Gaussova Teoréma egregium 163
7.9 Rovnoběžný posun vektorů 165
7.10 Geodetiky 169
7.11 Parametrizace 170
7.12 Geodetické souřadnice 171
7.13 Plochy s konstantní křivostí 172
7.14 Vektorová pole 174

8 Semi-Riemannova geometrie **179**
8.1 Směrová derivace 179
8.2 Vektorová pole 182
8.3 Diferenciální formy 184
8.4 Afinní konexe 184
8.5 Metrický tenzor 187
8.6 Konformní zobrazení 192
8.7 Hladké variety 192
8.8 Nejkratší cesty 195

9 Neeukleidovské metriky **197**
9.1 Horní polorovina 198
9.2 Jednotkový kruh 202
9.3 Hyperboloid 204
9.4 Kleinova hyperbolická metrika 205
9.5 Teselace hyperbolické roviny 208
9.6 Sféra 212
9.7 Eliptická rovina 213

10 Geometrie prostoročasu **217**
10.1 Minkowského prostoročas . . . 217
10.2 Schwarzschildův prostoročas . . . 220
10.3 Dráhy fotonů . . . 224
10.4 Dráhy částic . . . 228
10.5 Kruskalovy souřadnice . . . 231
10.6 Kosmologické modely . . . 234

11 Matematické struktury **237**
11.1 Predikátový počet . . . 237
11.2 Grupy . . . 240
11.3 Okruhy a tělesa . . . 241
11.4 Vektorové prostory . . . 243
11.5 Matice . . . 245
11.6 Lineární zobrazení . . . 246
11.7 Duální prostor . . . 247
11.8 Bilineární formy . . . 251
11.9 Afinní prostory . . . 254
11.10 Eukleidovské prostory . . . 256
11.11 Minkowského prostoročasy . . . 257
11.12 Topologické prostory . . . 259
11.13 Komplexní čísla . . . 261
11.14 Komplexní möbiovské transformace . . . 263
11.15 Diferenciální rovnice . . . 266
11.16 Problém dvou těles . . . 267
11.17 Konzervativní dynamické systémy . . . 270

12 Geometrie a aritmetika **273**

Literatura **277**

Jmenný rejstřík **283**

Věcný rejstřík **285**

PŘEDMLUVA

V matematice opakovaně dochází k propojování různých, někdy i dost odlehlých oblastí, kdy se ze společných vlastností různých matematických struktur stávají definice obecnější a abstraktnější teorie, ve které teprve vynikne podstata popisovaných jevů.

V předkládané knize tento vývoj k obecnosti a k abstrakci sledujeme v geometrii. Úvodní kapitola je určitým pokusem o fenomenologii prostoru, ve kterém se pohybujeme a orientujeme. V další kapitole pojednáváme o Eukleidových *Základech*, které se svou axiomatickou výstavbou představují syntézu geometrického a logického myšlení. Zaměřujeme se na některé jejich partie, které v dalším vývoji geometrie sehrály významnou roli.

Sférická geometrie a trigonometrie se v antice považuje za součást astronomie a s geometrií eukleidovské roviny nemá nic společného. Ale novověcí geometři, kteří se pokoušeli dokázat pátý Eukleidův postulát, ji jako alternativu eukleidovské geometrie začali vnímat. A tak se stala jedním z inspiračních zdrojů neeukleidovských geometrií.

Projektivní geometrie vzniká jako odraz studií o perspektivě v renesančním malířství. Také ona je významným stupněm na cestě geometrické abstrakce. Abstrahuje totiž od měření délek a úhlů a zabývá se pouze vzájemnou polohou geometrických objektů. Proto se jí někdy říká geometrie polohy.

V rámci novověkého infinitesimálního počtu vznikla geometrie ploch Carla Friedricha Gausse (1778–1855). Na jejích klíčových pojmech metrického tenzoru, geodetiky a křivosti byla ve velké syntéze vybudována abstraktní diferenciální geometrie Bernharda Riemanna (1826–1866) a Tullio Levi-Civita (1873–1941) s klíčovými pojmy diferencovatelné variety, afinní konexe a tenzoru křivosti. A k dalšímu zobecnění dochází v geometrii obecné teorie relativity Alberta Einsteina (1879–1955).

Těmto tématům jsme se věnovali na geometrickém semináři, který probíhal v CTS[1] v letech 2021–2022. Za cenné podněty děkuji všem účastníkům semináře, jmenovitě Michalu Ajvazovi, Ivanu Chvatíkovi, Romanu Koteckému, Pavlu Krtoušovi, Janu Makovskému, Alexandru Matouškovi a Janu Zemanovi. Na Matematicko-fyzikální fakultě UK probíhal na podzim roku 2022 seminář o projektivní geometrii. Také jeho účastníci Štěpán Holub, Lukáš Krump a Zbyněk Šír svou kritikou přispěli k výsledné podobě knihy. Za cenné připomínky k předběžné verzi textu děkuji Peterovi Zamarovskému a oběma recenzentům Pavlu Krtoušovi a Zbyňku Šírovi. Za diskuze o filosofii matematiky vděčím Štěpánu Holubovi.

Kniha je určená zvídavým čtenářům se znalostmi středoškolské matematiky. Ta by měla postačovat pro porozumění prvním kapitolám o eukleidovské, neeukleidovské a projektivní geometrii. V dalších kapitolách matematická náročnost postupně roste. Kapitola o analytické geometrii projektivních prostorů je založena na abstraktní, ale nepřílíš obtížné teorii vektorových prostorů. Následující kapitola o Gaussově teorii ploch již používá náročnější matematiku diferenciálního počtu. A v další kapitole o Riemannově diferenciální geometrii k tomu přistupuje vyšší úroveň matematické abstrakce. Používané teorie jsou sice vyloženy v kapitole o matematických strukturách, ale bez předběžných znalostí těchto témat se asi čtenář neobejde.

Předkládaná kniha volně navazuje a tvoří doplněk k naší knize (se spoluautorem Bedřichem Velickým) *Hermeneutika a metaforika čísel. Od počtů ke kvantové mechanice* [33]. Sleduje geometrii od jejích inspiračních zdrojů k vrcholným syntézám geometrického myšlení. Přeji čtenáři radost při odhalování poutavého příběhu geometrie, její podmanivosti a krásy.

Praha, leden 2023

Petr Kůrka

[1] Centrum pro teoretická studia, společné pracoviště Univerzity Karlovy v Praze a Akademie věd České republiky.

Kapitola 1

Fenomén prostoru

Prostředí, ve kterém žijeme, je bohatě strukturováno. Je v něm mnoho věcí – přírodních útvarů i artefaktů, které dokážeme rozeznávat a identifikovat. Umístění těchto věcí tvoří prostor, ve kterém se orientujeme a pohybujeme. V domě se orientujeme podle architektury místností, dveří, oken a nábytku, v krajině se orientujeme podle přírodních útvarů, jako jsou stromy, kopce, potoky či řeky, nebo podle artefaktů, jako jsou domy, ulice, stožáry či pomníky. Tyto objekty se mění tak málo a tak pomalu, že je vnímáme jako stálé a přisuzujeme jim skutečnou existenci. Věříme, že zůstanou na svých místech, i když jdeme jinam, a že je znovu najdeme, když se k nim vrátíme.

V nejbližším okolí domova známe většinu dostupných míst a opakovaně jimi procházíme. Význačné směry pro nás představují vzdálené charakteristické objekty, jejichž směr se při místním pohybu příliš nemění. V širším okolí chodíme nebo jezdíme spíše po cestách či silnicích. Na nich jsou informativní značky a určitá význačná místa, jako jsou rozcestí, charakteristické přírodní útvary nebo artefakty. Těm dáváme jména, a domlouváme se o nich v komunitě, ve které žijeme. Cesty, ulice a silnice tvoří jakési jednorozměrné sondy do prostoru dvourozměrné krajiny, která nám jinak zůstává neznámá. I když se pohybujeme krajinou mimo cesty, například při hledání hub, projdeme jen malou část krajiny. Třetí dimenzi zakoušíme při překonávání výškových rozdílů, při výstupu na horu nebo na rozhlednu. Ve své plnosti je ale vyhrazena rybám, ptákům a letadlům. Tato třetí dimenze prostoru je určována gravitací. V nerovné krajině ji musíme překonávat, nebo nám naopak cestu usnadňuje. Ocitneme-li se v neznámém prostředí, můžeme se podle gravitace orientovat. Jdeme-li stále dolů, máme naději, že narazíme na potok či řeku, podle které dojdeme do nejbližší vesnice nebo města. Gravitace se projevuje vodorovnou hladinou jezer nebo vertikálou některých stromů (je rovný jako jedle). Spolu s jevem tření je gravitace podmínkou našeho pohybu. Jen díky ní se můžeme o zemi opřít.[1]

Prostor poznáváme v první řadě pohybem a hmatem. Pohybujeme se v něm a dotýkáme se předmětů v něm umístěných. Uvědomujeme si, jaké musíme vynaložit úsilí, abychom k nim mohli dospět. To vysvětluje Michal Ajvaz:

> Představme si bytost, která se celý život pohybuje na vozíku, který někdo dálkově ovládá a který se hladce pohybuje po kolejích. Bytost nemá žádné prožitky síly vynakládané na vlastní tělesný pohyb a na odpor vůči tlaku, předměty jsou od ní dostatečně vzdálené, takže nemá ani žádné hmatové prožitky a pro jednoduchost si představme, že necítí ani jakýkoliv odpor vzduchu. Za těchto okolností bude perspektivní proměny tvarů, spojené se změnou místa (čtverce se mění v obdélníky, kruhy v ovály, plochy se překrývají, zmenšují a zvětšují), chápat pouze jako jakési proměny tvarů na ploše. Dokáže je zasazovat do řad souvislostí, a tedy i předvídat, nebude ale mít možnost pochopit, co je hloubka, a tedy ani co je prostor, tvar a pohyb (nechápe ani, že ona sama se pohybuje) a co jsou rozdíly vzdáleností v prostoru. K tomu, aby toto vše pochopila, by se musela alespoň minimálně pohybovat, vynakládat sílu, dotýkat se věcí a zakoušet jejich odpor: teprve potom si uvědomí kore-

[1] Poznámka recenzenta (PK): V základním pojetí geometrie ale gravitace a další síly přesahují koncepci prostoru. Jsou z domény fyziky, kde vedle prostorových vztahů hraje roli i vzájemné působení, pohyb a jeho dynamika. K poznávání prostoru sice pohyb a interakce s tělesy v prostoru využíváme. Koncepce prostoru a geometrie však od tohoto abstrahuje. Základní geometrie se zabývá právě jen rysy, které jsou od dynamiky a pohybu oprostěny. V tomto smyslu nám sice naše hmatové, časové a „interaktivní“ počitky prostor otevírají a pomáhají pochopit − jak je i líčeno dále. Ale nejsou ve skutečnosti částí geometrie samotné. Patří až do fyzikálního popisu. Geometrie od nich abstrahuje a zaměřuje se pouze na prostorové vztahy bez dynamiky, časových změn a interakcí.

> lace mezi proměnami perspektivních tvarů a různými mody vynakládání tělesné síly, včetně prožitků odporu neprostupných těles, které pohybu zabraňují, a z těchto korelací se pozvolna zrodí všechny prostorové významy – a ovšem zároveň se z prostorových významů zrodí plný význam „síly“ jako působení v určitém prostoru a čase (Ajvaz [2, str. 61]).

Předměty v našem okolí také vidíme a některé z nich můžeme i slyšet a cítit. Vnímáme, v jakém směru se nacházejí, jak jsou od nás daleko a jak se k nim přibližujeme nebo se od nich vzdalujeme. Některé z těchto předmětů dokážeme přemisťovat, tj. měnit jejich umístění vzhledem k jiným předmětům. Vnímáme také pohyb jiných lidí a zvířat i pohyby vozidel a vanutí větru. U všech těchto pohybů vnímáme jejich směry a rychlosti.

V pohybu se projevuje vztah mezi prostorem a časem. Čas vnímáme skrze periodické děje, jako je střídání dne a noci. V delším časovém horizontu je to střídání ročních období a postupná proměna věcí, které nás obklopují. Naopak v kratším časovém horizontu prožívaný čas koresponduje s fyziologickými ději našeho těla, s tepem srdce, s únavou, s jídlem. Objektivizujeme ho hodinami, které jsou založeny na fyzikálních realizacích harmonického oscilátoru a vytvářejí sdílený čas komunity.

Při pohybu v krajině vnímáme její topologii a metriku. To znamená, že si uvědomujeme, jak jsou uspořádána místa, kterými procházíme, nebo která vidíme, a jak jsou od sebe daleko. Délku cesty lze měřit krokováním nebo časem potřebným na její překonání. Přímé vzdálenosti mezi význačnými místy lze měřit délkou napnutého provazu nebo opticky dálkoměrem. Různé směry svírají úhly, které můžeme měřit úhloměrem či teodolitem. Metrika krajiny se objektivizuje souřadnými soustavami, jako je zeměpisná délka a šířka.

1.1 Eukleidovská geometrie

Abstrahujeme-li od význačných míst a význačných směrů, získáme homogenní a izotropní prostor rovinné či prostorové geometrie – geometrie, která je stejná v každém místě a v každém směru. Rovinná geometrie se odehrává v ideální rovině bez prohlubní a vyvýšenin. Ta není ničím omezena, nemá žádnou mez. Nalézají se v ní ideální geometrické útvary, jako jsou body, které nemají žádnou rozlohu, ideálně rovné přímky a úsečky, ideální trojúhelníky či kružnice. Mezi těmito geometrickými útvary jsou ideální vztahy jako **incidence** (bod leží na přímce), **kongruence** (stejná délka úseček), **mezilehlost** (bod leží na úsečce mezi jejími krajními body). Dokážeme-li nahlédnout geometrické objekty v jejich idealitě, dokážeme i nahlédnout některé ideální vztahy mezi nimi. Jiné přímo nahlédnout nedokážeme, ale můžeme k nim dospět pomocí rozumu, logiky nebo výpočtu. To podrobně analyzuje Petr Vopěnka (1935–2015) [55].

Protože ideální geometrický prostor je homogenní a izotropní, jeho body nemají žádnou individualitu, pomocí níž bychom je mohli rozlišovat. V tomto ohledu se geometrické struktury výrazně odlišují od algebraických struktur, ve kterých význačné objekty jsou, například nula nebo jednotka. O geometrických objektech můžeme mluvit jen tak, že je vztahujeme k jiným geometrickým objektům. Proto při studiu geometrie hrají podstatnou roli různé typy **souřadných soustav**, které umožňují geometrické objekty identifikovat. Volby těchto souřadných soustav jsou ale nutně arbitrární. Geometrické vztahy na nich nemohou záviset.

Idealita geometrických útvarů je společná všem geometriím. Do eukleidovské geometrie, která je vyložena v Eukleidových[2] *Základech*, vstupujeme, jakmile uvažujeme o pojmech **podobnosti** nebo **čtverce**. Dva rovinné nebo prostorové útvary jsou podobné, je-li jeden z nich zvětšením druhého v určitém poměru. Podobnosti se týkají nejstarší řecké zprávy o geometrii. Hérodotos[3] líčí, že Thalés[4] měřil výšku egyptských pyramid délkou jejich stínu v okamžiku, kdy svislá tyč vrhá stejně dlouhý stín jako ona sama. Jedná se tedy o podobnost rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků. Vzdálenost lodi, kterou vidíme na moři, lze určit tak, že ji pozorujeme ze dvou míst pobřeží a změříme úhly, pod kterými ji z těchto míst vidíme. Potom si nakreslíme zmenšený, tj. podobný model této situace se stejnými úhly a vzdálenost změříme na něm (viz Kratochvíl [31, str. 187]). Na podobnosti jsou založeny mapy, podle kterých se orientujeme v krajině, nebo plány domů, které stavíme.

[2] Eukleidés (třetí století před Kristem).
[3] Hérodotos (asi 484–425 před Kristem).
[4] Thalés z Milétu (asi 625–543 před Kristem).

Intenzivněji vnímáme topologii, metriku a geometrii prostoru při tvorbě artefaktů, například při stavbě přístřeší nebo domu. Jako půdorysy staveb přirozeně vyvstávají rovinné útvary jako kruh, obdélník nebo čtverec, které jsou charakteristickými objekty eukleidovské geometrie. Zákony statiky nás nutí respektovat gravitaci. Přitom potřebujeme nejjednodušší geometrické nástroje: olovnici pro vyměřování vertikál, vodováhu pro vyměřování vodorovných rovin, pásmo pro měření délek a úhelník jako etalon pravého úhlu. Ten lze také sestrojit pomocí pythagorejských trojic jako $(3, 4, 5)$ nebo $(5, 12, 13)$.

Jens Høyrup [25] a Jøran Friberg [18] dokládají, že takováto „eukleidovská" geometrie se po mnoha generacích předávala z mistra na učedníka v prostředí praktických matematiků: architektů, stavitelů, zeměměřičů a účetních. Ti nenapsali žádné traktáty ani učebnice, ale zůstaly po nich výrazné stopy v klínopisných tabulkách Staré Babylonie a ovlivňovali i geometrii antického Řecka do té míry, že z pojmů podobnosti a čtverce se stala slova běžného jazyka a byly pochopeny ve své idealitě. Jen tak bylo možné, že nevzdělaný otrok z Platónova[5] dialogu Menón [41] věděl, co je čtverec, a dokázal ho nahlédnout v jeho idealitě. Teprve to mu umožnilo evidovat, že čtverec nad úhlopříčkou má dvojnásobnou plochu.

Kvantitativní vztahy eukleidovské geometrie se pojednávají v nauce o poměrech a v trigonometrii – nauce o trojúhelnících. Známe-li délky stran trojúhelníku, můžeme z nich vypočítat velikosti jeho úhlů. Pokud známe dvě strany a úhel jimi sevřený, můžeme vypočítat třetí stranu i zbylé dva úhly. A známe-li jednu stranu a přilehlé dva úhly, můžeme vypočítat třetí úhel a ostatní dvě strany. Tyto výpočty jsou založeny na sinové a kosinové větě. Z úhlů trojúhelníku ale nemůžeme určit jeho strany, pouze jejich poměry. Podobné trojúhelníky mají totiž úhly stejné.

1.2 Sférická geometrie

V krajinách, ve kterých nenajdeme žádné záchytné orientační body, jako jsou pouště či otevřené moře, se můžeme orientovat podle Slunce, Měsíce nebo hvězd. Také tyto nebeské útvary či úkazy mají svou identitu,

[5] Platón (427–347 před Kristem).

která přetrvává v čase. Apriori není úplně zřejmé, že Slunce, které vyšlo dnes, je to samé Slunce, které včera večer zapadlo. Ale vypadá stejně a pohybuje se (skoro) po stejné dráze, takže ho za to samé Slunce považujeme. Podobně přisuzujeme nezaměnitelnou individualitu a identitu Měsíci, který nejen vychází a zapadá, ale také ubývá až zmizí docela, aby se po několika dnech objevil jako Nový Měsíc.

Na rozdíl od Slunce a Měsíce s jejich charakteristickým vzhledem, se nám hvězdy jeví jako bezrozměrné body – nejsou právě ony prototypem pojmu geometrického bodu? Liší se od sebe jen svou jasností a barvou a je obtížnější je identifikovat. Na obloze ale vytvářejí souhvězdí – stabilní obrazce, do kterých si promítáme antická božstva a identifikujeme je podle tvaru.[6] Na rozdíl od pozemských orientačních útvarů, ke kterým můžeme přistupovat aktivně, k nebeským útvarům se vztahujeme pasivně. Nemůžeme k nim dojít a už vůbec ne s nimi hýbat. Nevnímáme přímo jejich vzdálenost. Vnímáme a měříme pouze úhly mezi nimi, tj. úhly paprsků, které od nich k nám putují. Teprve ve dvacátém století vedly sofistikované teorie a měřící techniky k tomu, že vzdálenosti hvězd či galaxií dokážeme určovat nebo aspoň odhadovat.

Noční obloha se během noci otáčí kolem pólu v blízkosti Polárky. Přitom se nemění úhly mezi jednotlivými hvězdami.[7] Noční obloha se také mění v průběhu roku. Souhvězdí v blízkosti pólu jsou viditelná celý rok, jiná jen v určitých ročních obdobích. To vede k pojmu myšlené nebeské sféry, z níž vidíme vždy jenom část ohraničenou kružnicí obzoru. Pohyb nebeské sféry určuje její význačné útvary severního a jižního pólu, hlavní kružnice rovníku a poledníků a vedlejší kružnice rovnoběžek. Ty vidět nejsou. Jsou to myšlené útvary určené otáčením nebeské sféry. Nebeská sféra je prototypem řádu a předvídatelnosti. Ve svém sepětí proměnlivosti a stability je výrazným protikladem k pozemské (sublunární) sféře s její chaotičností a nepředvídatelností.

Mezi souhvězdími nebeské sféry se pohybují planety – bludné hvězdy. Nejrychleji se pohybuje Měsíc, o něco pomaleji planety Merkur, Venuše

[6] Dramaticky je tento aspekt vylíčen v dodatku *The rainmaker* knihy Hermanna Hesse *Magister Ludi* [20, str. 413]. Pojednává o domorodém kmeni, který se stane svědkem, dnešním jazykem řečeno, meteorického roje. Pro ně to ovšem znamená, že se bortí nebeská klenba a že přichází konec světa. Pouze šaman, který dokáže identifikovat souhvězdí, si uvědomí, že staré hvězdy na obloze zůstávají.

[7] S výjimkou hvězd těsně nad obzorem, jejichž paprsky se lámou v atmosféře.

a Mars a nejpomaleji vnější planety Jupiter, Saturn, Uran a Neptun. Pozorování hvězdné oblohy krátce po setmění a krátce před svítáním vede k náhledu, že se mezi souhvězdími pohybuje i Slunce, v jehož svitu sice hvězdy nejsou vidět, ale na obloze zůstávají i ve dne. Roční dráha Slunce po nebeské sféře je ekliptika. To je další význačná hlavní kružnice nebeské sféry. Ekliptika protíná rovník v jarním a podzimním bodě. Poledníky počítané od jarního bodu spolu s rovníkem a rovnoběžkami tvoří souřadnou soustavu nebeské sféry. Každý její bod lze jednoznačně určit poledníkem a rovnoběžkou, které jím procházejí – její rektascenzí a deklinací.

Sférická geometrie se odehrává na ideální sféře, ve které abstrahujeme od všech konkrétních nebeských útvarů i od nebeských souřadnic. Nalézají se na ní jen ideální body a ideální kružnice. Geometrie sféry se v něčem podobá geometrii roviny, v něčem se ale liší. Analogií přímek jsou na sféře hlavní kružnice. To jsou průniky sféry s rovinou, která prochází jejím středem. Nejkratší spojnicí dvou bodů sféry je oblouk (část) hlavní kružnice. Pokud tyto body nejsou protilehlé, existuje jediná jejich nejkratší spojnice. Z oblouků hlavních kružnic lze sestavovat trojúhelníky nebo mnohoúhelníky, lze měřit jejich délky a úhly mezi nimi i plochy sférických obrazců.

Sférická trigonometrie studuje sférické trojúhelníky, jejichž strany jsou oblouky hlavních kružnic. Součet úhlů sférického trojúhelníku je vždy větší než 180 stupňů a je tím větší, čím je větší jeho plocha. Také ve sférické trigonometrii máme sinovou a kosinovou větu, podle které můžeme ze tří údajů trojúhelníku vypočítat ostatní tři. Na rozdíl od eukleidovské geometrie ale také můžeme vypočítat strany trojúhelníku z jeho úhlů.

1.3 Newtonův absolutní prostor a čas

Tychonova[8] supernova z roku 1572 a Keplerova[9] supernova z roku 1604 pomohly rozbít představu neměnné hvězdné sféry.[10] Giordano Bruno

[8] Tycho Brahe (1546–1601).

[9] Johannes Kepler (1571–1630).

[10] V antice představa nebeské sféry všeobecně přijímána nebyla. Ve středověké Evropě byla přijata zejména pod vlivem Tomáše Akvinského (1225–1274).

(1548–1600) si již představuje nekonečný vesmírný prostor, ve kterém je nekonečný počet hvězd. Z této představy vychází Newtonův[11] nekonečný absolutní prostor.[12]

Ten je fixován vzdálenými hvězdami, které se chápou jako nehybné. Významným pevným bodem tohoto prostoru je těžiště sluneční soustavy. Okolo něj krouží všechny planety, a dokonce i Slunce, i když těžiště sluneční soustavy uvnitř Slunce stále zůstává. Newtonovy pohybové zákony a Newtonův gravitační zákon jednoznačně určují pohyby všech těles (nebo spíše všech hmotných bodů), které se v absolutním prostoru nacházejí.

Absolutní prostor má přirozenou kartézskou souřadnou soustavu, jejíž počátek je v těžišti sluneční soustavy. **Inerciální vztažné soustavy** jsou ty, které se vzhledem k abolutnímu prostoru pohybují přímočaře a rovnoměrně a neotáčí se. Newton ukazuje, že v inerciálních soustavách platí stejné zákony mechaniky jako v absolutním prostoru. Těžiště sluneční soustavy tím ztrácí svou privilegovanou pozici, takže newtonovský prostor je homogenní a izotropní.

1.4 Projektivní geometrie

Sférické geometrii se v něčem podobá projektivní geometrie, která se odvozuje od pohledu malíře na kreslenou scénu. Tak jako hvězdář pozoruje úhly mezi hvězdami, malíř krajinou neprochází, ale pozoruje ji z jednoho místa a vnímá pouze úhly, pod kterými krajinné útvary vidí. Tyto trojrozměrné útvary promítá na rovinné plátno. Jedná-li se o malbu nepříliš zvlněné krajiny, dostáváme geometricky jednodušší situaci průmětu jedné roviny na druhou. V kontextu eukleidovské geometrie chápeme malovanou krajinu i plátno jako nekonečnou rovinu. Projektivní geometrie doplňuje eukleidovskou rovinu o **nevlastní body** v nekonečnu, ve kterých se protínají rovnoběžné přímky. Tímto doplněním vzniká z eukleidovské roviny projektivní rovina. Na každé její přímce je jeden nevlastní bod v nekonečnu, v obou směrech stejný, který z ní dělá

[11] Isaac Newton (1642–1727).

[12] Poznámka recenzenta (PK): „Přidaná hodnota“ absolutního prostoru oproti geometrickému eukleidovskému prostoru je „pojem klidu“. Ten dává základ pro dynamiku newtonovské fyziky. Absolutní protor tak přesahuje základní geometrickou koncepci.

útvar topologicky ekvivalentní kružnici. Geometrie projektivní roviny je jednodušší než geometrie eukleidovské roviny. V projektivní geometrii platí nejen, že každé dva různé body určují jedinou přímku, na které oba leží, ale také se každé dvě různé přímky protínají v jediném bodě. Při projekcích se nezachovávají vzdálenosti ani úhly. Proto se těmito pojmy projektivní geometrie nezabývá. Přímky se ale zobrazují na přímky, kuželosečky se zobrazují na kuželosečky a zachovává se vztah incidence. Místo metriky se v projektivní geometrii studuje dvojpoměr. To je metrický invariant čtyř bodů na přímce, který se při projekcích zachovává.

V Erlangenském programu Felixe Kleina (1849–1925) má projektivní geometrie specifické postavení jako základ geometrií všech homogenních prostorů: afinního, eukleidovského, hyperbolického i eliptického. Homogenní prostory jsou „všude stejné“. Jsou charakterizovány vlastností, že geometrické útvary se v nich mohou pohybovat, aniž by měnily svůj tvar, tj. aniž by se měnily vzdálenosti jejich bodů.

1.5 Neeukleidovské geometrie

Pátý Eukleidův axiom o rovnoběžkách byl již od antiky přijímán s rozpaky. Zdálo se, že je nadbytečný, a proto se ho mnoho matematiků pokoušelo dokázat z ostatních axiomů. Nejslibnější pokus o takový důkaz se vede sporem. Předpokládá se, že platí jeho negace, a odvozují se její důsledky, aby se nakonec dospělo k logickému sporu. Různí matematici tak odvodili mnohé paradoxní důsledky, ale žádný spor.

Začátkem devatenáctého století Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856) a János Bolyai (1802–1860) dospěli k náhledu, že negace pátého axiomu ke sporu nevede a že její důsledky tvoří podivuhodný svět neeukleidovské hyperbolické geometrie. V ní lze každým bodem vést nekonečně mnoho rovnoběžek k přímce, která tímto bodem neprochází. Hyperbolická geometrie vykazuje pozoruhodnou symetrii se sférickou geometrií. Tam, kde ve sférické trigonometrii vystupují goniometrické funkce sinus a kosinus, v hyperbolické geometrii vystupují funkce hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus odvozené z exponenciály. Hyperbolická geometrie ale neměla oporu v názoru. Na rozdíl od sférické a projektivní geometrie nebyla k dispozici žádná ideální hyperbolická rovina, na které by bylo možné věty hyperbolické geometrie evidovat. Důkazy jejích vět byly založeny pouze na logice a výpočtech.

To se změnilo v druhé polovině devatenáctého století, kdy Felix Klein, Eugenio Beltrami (1835–1900) a Henri Poincaré (1854–1912) předložili modely hyperbolické geometrie uvnitř eukleidovské geometrie. Ukázali tak, že hyperbolická geometrie je bezesporná, a stvořili ideální geometrický prostor, na kterém lze věty hyperbolické geometrie evidovat. Současně se s tím ale oslabila vazba geometrie na přirozený svět.

Mezitím objevil Bernhard Riemann (1826–1866) eliptickou geometrii jako druhou neeukleidovskou geometrii. V ní žádné rovnoběžky nejsou. Každé dvě různé přímky se protínají. Eliptická geometrie unikla pozornosti objevitelů hyperbolické geometrie, protože její přímky jsou do sebe uzavřené podobně jako kružnice. Riemann si ale uvědomil, že jejich klíčová vlastnost, na které lze vybudovat eliptickou geometrii, je neomezenost. Při jejich procházení na žádnou mez nenarazíme.

1.6 Gaussova geometrie ploch

V souvislosti s rozvojem diferenciálního počtu se v novověku začaly studovat rovinné a prostorové křivky vnořené do trojrozměrného prostoru. Pomocí integrálního počtu lze určovat jejich délku. Tvar rovinné křivky plně charakterizuje její křivost. To je převrácená hodnota poloměru její oskulační kružnice, která se ke křivce v daném bodě nejtěsněji přimyká. Podél křivky se její křivost může měnit. Je-li stálá, jedná se o kružnici. Prostorové křivky kromě křivosti charakterizuje ještě torze, tj. rychlost otáčení roviny její oskulační kružnice.

Studují se také dvourozměrné plochy vnořené do trojrozměrného prostoru. Jejich geometrie nemusí být ani homogenní, ani izotropní. Výraznou geometrickou charakteristikou je křivost plochy v daném bodě charakterizovaná křivostí křivek, které tímto bodem procházejí. Součin nejmenší a největší z těchto křivostí se nazývá Gaussova křivost. Na sféře nebo na vrcholu hory je Gaussova křivost kladná: všechny křivky procházející takovým bodem se ohýbají na stejnou stranu. Na povrchu zvonu nebo na horském sedle je Gaussova křivost záporná. Křivky pro-