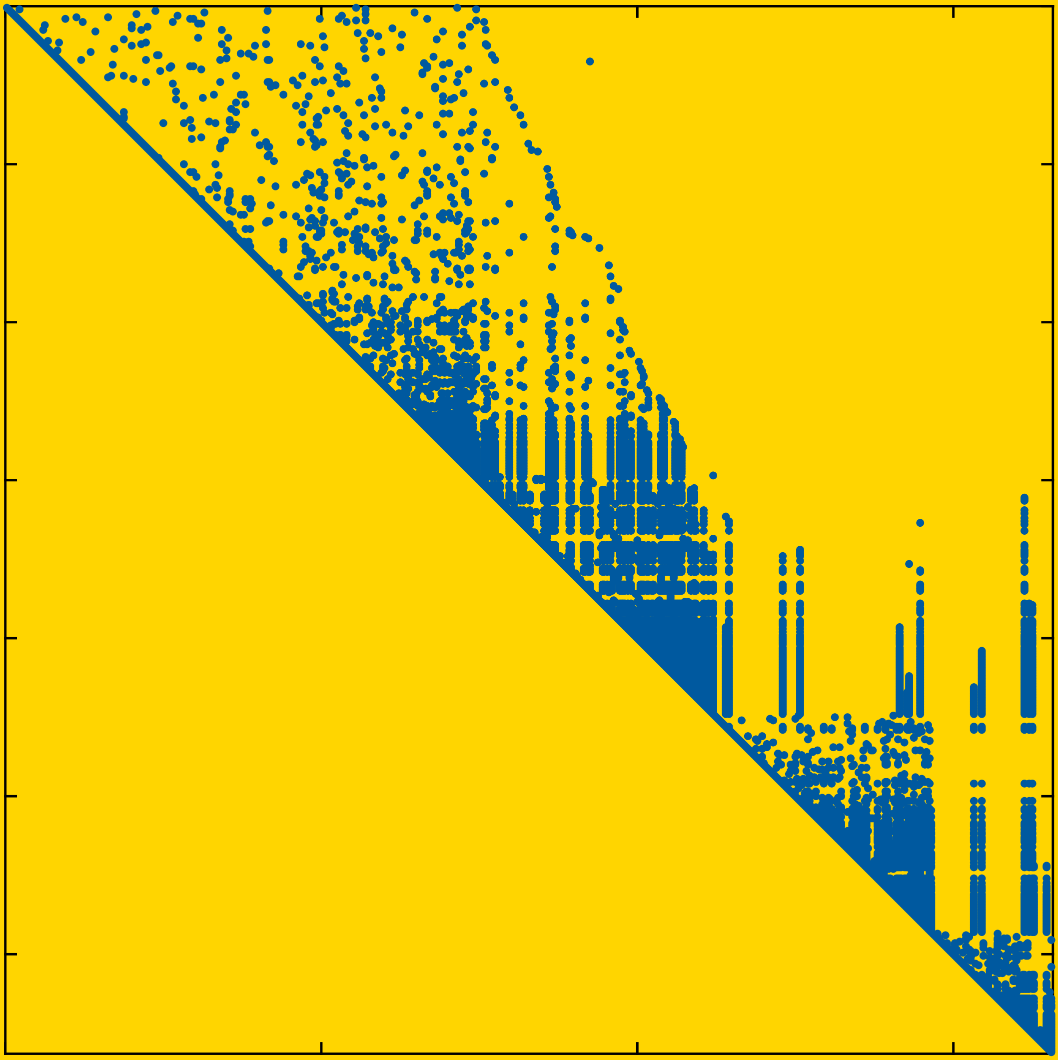
VÝPISKY Z LINEÁRNÍ ALGEBRY OČIMA NEMATEMATIKA

MARTIN PLEŠINGER

KAROLINUM



Výpisky z lineární algebry očima nematematika

Martin Plešinger

Recenzovali:
doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

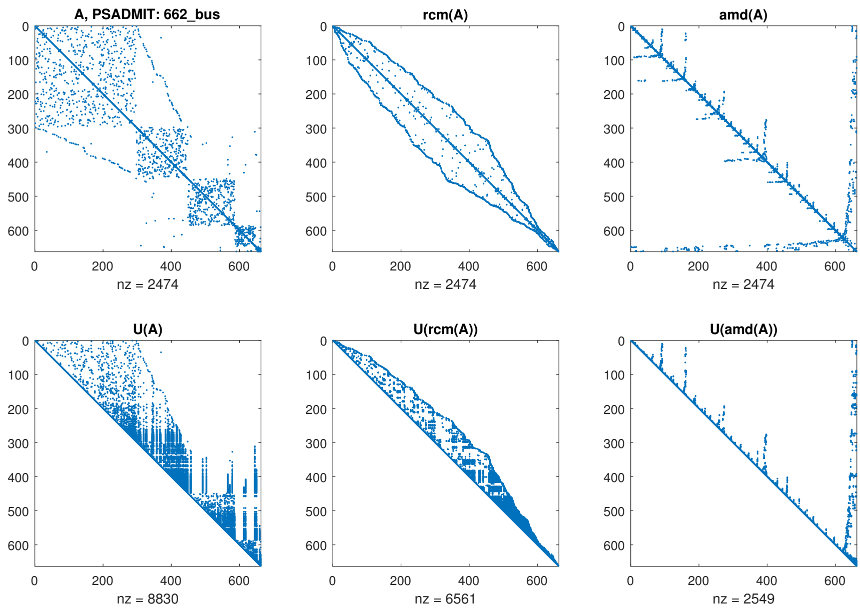
Publikace byla vydána za podpory Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy a Národního plánu obnovy v rámci projektu Transformace pro VŠ na UK (reg. č. NPO_UK_MSMT-16602/2022).

Vydala Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum
Praha 2023
Jazyková korektura Silvie Mitlenerová
Obálka Jan Šerých
Sazba Martin Plešinger
Vydání první

ISBN 978-80-246-4096-9
ISBN 978-80-246-5554-3 (pdf)

Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz



První řádek: Struktura nenulových prvků matice `662_bus` modelu energetické přenosové sítě `PSADMIT` a dvě její (simultánní tj. řádkové i sloupcové) permutace spočtené algoritmy *Reverse Cuthill–McKee* a *Approximate minimum degree*. *Druhý řádek*: LU-rozklady (resp. faktory $U = L^{\mathsf{T}}$) těchto matic. Matice převzata z Matrix Marketu [20] z Harwell-Boeing Collection [19], `https://math.nist.gov/MatrixMarket/data/Harwell-Boeing/psadmit/psadmit.html`.

Obrázek 8.4 na straně 262 namaloval

Roland Havran, `https://cz.linkedin.com/in/roland-havran-49905912b`.

Obsah

Co už možná známe, místo řečí úvodem **13**

1 Základní stavební kameny — vektory & matice **19**
1.1 Několik slov k množinám a uspořádaným množinám — n-ticím . . 19
1.1.1 Kartézský součin množin 20
1.1.2 Některé číselné množiny 21
1.2 Vektory 22
1.2.1 Vektory v analytické geometrii 22
1.2.2 Vektory ve fyzice 23
1.2.3 Vektory jako uspořádané n-tice 24
1.3 Operace s vektory 25
1.3.1 Součet dvou vektorů 25
1.3.2 Součin vektoru a čísla 26
1.3.3 Lineární kombinace vektorů 29
1.3.4 Součin dvou vektorů? 30
1.3.4.1 Skalární součin 31
1.3.4.2 Vektorový součin 31
1.4 Matice 32
1.4.1 Matice jako uspořádané (n, k)-tice 32
1.4.2 Součet dvou matic, součin matice a čísla 33
1.4.3 Transpozice matice 34
1.4.4 Matice speciálních tvarů 35
1.4.5 Matice se speciální strukturou prvků 35

2 Maticové násobení **39**
2.1 Součin matice a vektoru (MV-součin) 39
2.1.1 MV-součin — definice a příklady užití 39
2.1.2 MV-součin jako lineární kombinace sloupců matice 44
2.2 Součin dvou matic (MM-součin) 46
2.2.1 MM-součin — definice a příklady užití 46
2.2.2 ☆ MM-součin matic speciálních tvarů 48
2.2.3 ☆ MM-součin jako soubor MV-, resp. VM-součinů 50
2.2.3.1 Výpočet prvků součinu po sloupcích 51
2.2.3.2 Výpočet prvků součinu po řádcích 52

2.2.4 ☆ MM-součin matic jako součet vnějších součinů 54
2.3 Vlastnosti maticového násobení 56
2.3.1 Maticové násobení není komutativní 57
2.3.2 Maticové násobení je asociativní 57
2.3.3 Maticové násobení je distributivní vůči sčítání 60
2.3.4 Transpozice součtu a transpozice součinu 61
2.4 Vybrané zajímavé součiny 62

3 Lineární (ne)závislost & ekvivalentní úpravy 69
3.1 S jakými objekty budeme pracovat? 69
3.2 Lineární závislost a nezávislost 70
3.2.1 Plyne z lineární závislosti existence vektoru, který lze nakombinovat z ostatních? 71
3.2.2 Lineární (ne)závislost podmnožiny a nadmnožiny 73
3.2.3 Přeformulování úlohy lineární (ne)závislosti vektorů 77
3.3 Ekvivalentní úpravy 79
3.3.1 Ekvivalentní úpravy souboru vektorů 80
3.3.1.1 Násobení vektoru nenulovým číslem 80
3.3.1.2 Přičtení násobku vektoru k jinému vektoru 82
3.3.1.3 Skládání elementárních úprav 83
3.3.2 Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic 85
3.3.2.1 Přidání & vypuštění nulové rovnice 88
3.3.3 Ekvivalentní úpravy v kontextu matic 88
3.3.3.1 Permutace řádků, resp. permutace sloupců 89
3.4 Maticový zápis ekvivalentních úprav 90
3.4.1 Násobení řádku matice nenulovým číslem 92
3.4.2 Přičtení násobku řádku matice k jinému řádku 93
3.4.3 Složené úpravy: přičtení mnoha řádků k jednomu, přičtení jednoho řádku k mnoha 95
3.4.4 Přidání & vypuštění nulového řádku matice 99
3.4.5 Permutace řádků matice 100

4 Gaußova eliminace & související pojmy 103
4.1 Úvodní poznámky 103
4.1.1 Metoda sčítací a dosazovací 104
4.1.2 Soustava v trojúhelníkovém tvaru 105
4.1.3 Lineární (ne)závislost řádků a sloupců matice v trojúhelníkovém tvaru 106
4.2 Převod obecné soustavy do horního trojúhelníkového tvaru 107
4.2.1 Základní struktura Gaußovy eliminace 107
4.2.2 Nula na diagonále — permutace, resp. pivotace 110
4.2.3 A může být hůř: Co když neexistuje nenulový pivot? Co když soustava není čtvercová? 111
4.3 Hodnost matice & základní klasifikace matic 115
4.3.1 Počet lineárně nezávislých řádků a sloupců schodovité matice 116
4.3.2 Jak moc různé jsou různé schodovité tvary téže matice? . . 118

4.3.3 Hodnost matice 119
4.3.4 Klasifikace matic z hlediska tvaru a hodnosti 120
4.4 Základní věty o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy lineárních rovnic 122
4.4.1 Klasifikace soustav rovnic 122
4.4.2 Frobeniova věta 123
4.4.3 Věta o soustavě s maticí plné řádkové hodnosti 125
4.4.4 Věta o soustavě s maticí plné sloupcové hodnosti 126
4.4.5 Poznámka k soustavě s regulární maticí 127
4.5 Inverzní matice 127
4.5.1 Existence inverze 128
4.5.1.1 Pravá inverze 129
4.5.1.2 Levá inverze 129
4.5.1.3 Levá a pravá inverze jedno jsou 130
4.5.2 Střípky z aritmetiky regulárních, resp. singulárních matic . 131
4.5.3 Několik slov na závěr 136

5 Gaußova eliminace jako LU-rozklad 139
5.1 Několik užitečných lemmátek úvodem 139
5.1.1 Součiny a inverze trojúhelníkových matic 139
5.1.2 Součiny a inverze eliminačních matic 142
5.2 LU-rozklad 146
5.2.1 Příklad na úvod 146
5.2.2 Gaußova eliminace, tj. LU-rozklad regulární matice krok za krokem 149
5.2.2.1 První krok 149
5.2.2.2 Druhý krok 150
5.2.2.3 Třetí krok 151
5.2.2.4 Obecný ℓ-tý krok, $\ell = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ 153
5.2.2.5 Shrnutí: LU-rozklad regulární matice 154
5.2.3 Věta o LU-rozkladu silně regulární matice 154
5.3 LU-rozklad v kontextu řešených úloh 159
5.3.1 Jak využít LU-rozklad k řešení soustavy rovnic? 159
5.3.2 Co se doopravdy děje při řešení soustavy pomocí Gaußovy eliminace? 160
5.3.3 Jak se LU-rozklad manifestuje ve výpočtu inverze pomocí Gaußovy eliminace? 161
5.3.4 Jak souvisí LU-rozklad matice s UL-rozkladem její inverze? 162
5.4 Pivotace, aneb permutace řádků 163
5.4.1 Zařazení permutací řádků do procesu eliminace 163
5.4.2 Permutační a eliminační půlkrok skoro komutují 164
5.4.3 Věta o LU-rozkladu obecné regulární matice 166
5.4.4 ☆ Motivace pro výběr pivota 167
5.4.5 Obecný LU-rozklad v kontextu řešených úloh 169

6 Lineární vektorový prostor, aneb vektory jsou skoro všude 171
6.1 Lineární vektorový prostor 171
6.1.1 Základní aritmetika lineárního vektorového prostoru 173
6.1.2 Příklady lineárních vektorových prostorů 175
6.1.2.1 Prostory aritmetických vektorů 175
6.1.2.2 Prostory matic 177
6.1.2.3 Prostory rovnic a prostory funkcí 177
6.1.2.4 Některé další zajímavé prostory 180
6.1.3 Podprostor a nadprostor daného prostoru 183
6.2 Lineární obal, báze, dimenze a souřadnice 188
6.2.1 Lineární obal souboru vektorů jako podprostor 189
6.2.2 Báze prostoru 190
6.2.3 Dimenze prostoru 196
6.2.4 Souřadnice vektoru v bázi 200
6.2.5 Matice přechodu mezi bázemi 201

7 Měříme vzdálenosti a velikosti úhlů v lineárním vektorovém prostoru 211
7.1 Jejich pravítkem je norma... 212
7.1.1 Eukleidovská norma v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ 213
7.1.2 Taxikářská norma v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ 215
7.1.3 Maximová norma v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ 216
7.1.4 Obecná p-norma v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ 217
7.2 Jejich úhloměrem je skalární součin... 219
7.2.1 Základní aritmetika skalárního součinu 221
7.2.2 Cauchyho–Schwarzova–Buňakovského nerovnost 222
7.2.3 Skalární součin indukuje normu 224
7.2.4 A kdy už konečně začneme měřit ty úhly? 227
7.2.4.1 Velikosti úhlů mezi nenulovými vektory 227
7.2.4.2 Zúplnění konceptu velikosti úhlu — ortogonalita . 228
7.2.5 Standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ 230
7.3 Ortogonalita a ortonormalita 232
7.3.1 Ortogonální, ortonormální vs. lineárně (ne)nezávislý a soubor vektorů 233
7.3.2 Od vektorů k podprostorům — vzájemná ortogonalita dvou podprostorů 235
7.3.3 Ortogonální doplněk 236
7.4 ☆ Tři poznámky na závěr 237
7.4.1 Ne každá norma je indukovaná skalárním součinem 237
7.4.2 Obecný skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ 240
7.4.3 Normy a skalární součiny v ostatních vektorových prostorech 243

8 Lineární zobrazení & matice — se speciálním zřetelem na zobrazení shodná 245
8.1 Lineární zobrazení & matice . . . 245
8.1.1 Lineární zobrazení na konečnědimenzionálních prostorech *jsou* matice . . . 246
8.1.2 Matice *jsou* lineární zobrazení . . . 249
8.2 Obor hodnot a nulový prostor matice zobrazení . . . 250
8.2.1 Obor hodnot neboli obraz matice . . . 250
8.2.2 Nulový prostor neboli jádro matice . . . 252
8.2.3 Vzájemný vztah oborů hodnot a nulových prostorů matic A a A^{H} . . . 254
8.2.4 ☆ Další vybrané vlastnosti oborů hodnot a nulových prostorů 256
8.3 Ortogonální & unitární matice — shodná zobrazení . . . 259
8.3.1 Několik poznámek k tradiční klasifikaci shodných zobrazení 259
8.3.1.1 Shodná zobrazení jsou obecně afinní — translací (posunutím) k linearizaci . . . 259
8.3.1.2 Středová symetrie v rovině je zároveň rotací . . . 261
8.3.1.3 Změny v (ne)přímosti zobrazení při rozšíření do $\mathbb{R}^3$ a dál . . . 261
8.3.2 Ortogonální a unitární matice obecně . . . 265
8.3.3 Givensovy rotace (otočení) v $\mathbb{R}^n$ — shodná zobrazení přímá 268
8.3.4 Householderovy reflexe (zrcadlení) v $\mathbb{R}^n$ — shodná zobrazení nepřímá . . . 274
8.4 QR-rozklad matice & orto[gon|norm]alizace . . . 282
8.4.1 Nulování složek vektoru . . . 282
8.4.2 Nulování složek matice neboli QR-rozklad . . . 286
8.4.3 ☆ Gramova–Schmidtova ortogonalizace . . . 291

9 Determinanty — zpět ke kořenům 299
9.1 Determinanty nízkých řádů, obecná definice determinantu & jeho geometrický význam . . . 299
9.1.1 Determinant řádu 2 . . . 300
9.1.2 Determinant řádu 3 . . . 302
9.1.3 Determinant řádu n . . . 307
9.2 Základní vlastnosti determinantů . . . 311
9.2.1 Determinant transponované a hermitovsky sdružené matice 311
9.2.2 Laplaceův rozvoj determinantu . . . 314
9.3 Multilinearita determinantu, Gaußova eliminace & výpočet determinantu, determinant součinu matic . . . 320
9.3.1 Determinant jako multilineární forma . . . 320
9.3.2 Determinant a Gaußova eliminace: praktický návod na výpočet determinantu . . . 323
9.3.2.1 Násobení řádku číslem & matice s nulovým řádkem 324
9.3.2.2 Prohození dvou řádků & matice se stejnými řádky 324
9.3.2.3 Přičtení násobku řádku k jinému řádku . . . 325

9.3.3 Nenulovost determinantu jako indikátor regularity & determinant součinu matic . . . 326
9.4 ☆ Vybrané klasické aplikace — Cramerovo pravidlo, adjugovaná matice & vztah mezi determinantem a vektorovým součinem . . 331
9.4.1 Cramerovo pravidlo . . . 331
9.4.2 Adjugovaná matice . . . 333
9.4.3 Vektorový součin . . . 336

10 Polynomiální intermezzo — řešení rovnic vyšších stupňů 341
10.1 Několik tipů & triků na úvod . . . 341
10.1.1 Monický polynom a přechod k monickému polynomu . . . 342
10.1.2 Vynulování druhého členu polynomu . . . 342
10.1.3 Redukovaný tvar polynomu . . . 343
10.1.4 Dělení polynomu polynomem . . . 344
10.1.5 Hornerův tvar polynomu & Hornerův algoritmus pro dělení kořenovým činitelem . . . 346
10.2 Polynomiální rovnice nízkých stupňů . . . 349
10.2.1 Kořeny lineární rovnice ($n = 1$) . . . 349
10.2.2 Kořeny kvadratické rovnice ($n = 2$) . . . 349
10.2.3 ☆ Kořeny kubické rovnice ($n = 3$) . . . 350
10.2.4 ☆ Kořeny kvartické rovnice ($n = 4$) . . . 351
10.3 Speciální polynomiální rovnice . . . 352
10.3.1 Kořeny binomické rovnice a víceznačená komplexní odmocnina . . . 352
10.3.2 ☆ Racionální kořeny polynomu s racionálními, resp. celočíselnými koeficienty . . . 353
10.3.3 ☆ Palindromické a antipalindromické polynomy . . . 355
10.4 Obecné výsledky . . . 358
10.4.1 Galoisova věta . . . 358
10.4.2 Gaußova věta — základní věta algebry . . . 359
10.4.3 Rozklad na kořenové činitele . . . 366
10.4.4 Kořeny reálného polynomu . . . 368

11 Problém vlastních čísel a vlastních vektorů 371
11.1 Motivace . . . 371
11.1.1 Problém vlastních čísel ve fyzice . . . 371
11.1.2 Problém vlastních čísel v chemii . . . 373
11.1.3 Problém vlastních čísel v informatice . . . 373
11.2 Vlastní čísla, vlastní vektory & podobnost matic . . . 375
11.2.1 Vlastní čísla jako kořeny polynomů . . . 376
11.2.2 Vlastní vektory, které odpovídají různým vlastním číslům 381
11.2.3 Podobnost matic . . . 384
11.3 Schurova věta & svět normálních matic . . . 387
11.3.1 Schurova věta . . . 387
11.3.2 Normální matice . . . 390
11.3.3 Příklady normálních matic . . . 394

11.3.4 Vlastní vektory normálních matic 397
11.3.5 Vlastní čísla vybraných normálních matic 399
11.3.5.1 Symetrické a hermitovské matice 399
11.3.5.2 Koso-symetrické a koso-hermitovské matice . . . 401
11.3.5.3 Ortogonální a unitární matice 402
11.4 Krátký výlet do světa nenormálních matic 405
11.4.1 Diagonalizovatelné matice 405
11.4.2 Levé a pravé vlastní vektory & spektrální rozklad diagonalizovatelných matic 407
11.4.3 Defektní matice & Jordanův blok 411
11.4.4 Jordanův kanonický tvar & geometrická násobnost vlastních čísel 415

12 Doplněk #1: Kvadratické formy 419
12.1 Drobný výlet do matematické analýzy 419
12.1.1 Průběh funkce, aproximace funkce polynomem & Taylorův rozvoj 420
12.1.2 Zobecnění pro funkce více proměnných 422
12.2 Lineární, bilineární a kvadratická forma 423
12.2.1 Lineární forma 424
12.2.2 Bilineární forma 424
12.2.3 Kvadratická forma 427
12.3 Definitnost a inercie kvadratických forem 429
12.3.1 Diagonalizace kvadratických forem 429
12.3.2 Definitnost kvadratických forem 430
12.3.3 Nutná podmínka pozitivní a negativní definitnosti 432
12.3.4 Prokládání vlastních čísel a Sylvesterovo kritérium 434
12.4 ☆ Jak správně transformovat — podobnost vs. maticová kongruence, kontravariantní vs. kovariantní souřadnice 436

13 Doplněk #2: ☆ Singulární rozklad 439
13.1 Motivace 439
13.1.1 Hermitovská matice a její spektrální rozklad 439
13.1.2 Hermitovská matice jako lineární zobrazení 440
13.2 Lineární zobrazení reprezentované obecnou maticí 442
13.2.1 Základní vlastnosti matic $A^{\mathsf{H}} \cdot A$ a $A \cdot A^{\mathsf{H}}$ 443
13.2.2 Spektrální rozklady matic $A^{\mathsf{H}} \cdot A$ a $A \cdot A^{\mathsf{H}}$ 444
13.2.3 Zavedení singulárního rozkladu 446
13.2.4 Maticový zápis singulárního rozkladu 447
13.3 Vybrané aplikace singulárního rozkladu 451
13.3.1 Jak lineární zobrazení deformuje prostor? 451
13.3.2 SVD & analýza dat 454
13.3.3 SVD & komprese dat 455
13.3.4 Hlavní úhly mezi podprostory 458
13.3.5 Pseudoinverze matice 461

Literatura **465**

Použité značení a zkratky **469**

Seznam obrázků **473**

Co už možná známe, místo řečí úvodem

Tento text vznikal v době koronavirové epidemie a kvůli (díky) této epidemii, totiž jako podpůrný text pro dočasně zavedené distanční studium. Epidemie svět zastihla v březnu roku 2020, tedy v letním semestru akademického roku 2019/2020. Text se však váže k předmětu, který je vyučovaný v semestru zimním, a vznikal tak až v akademickém roce 2020/2021. Celý úvodní kurz sestávající ze dvou předmětů zaměřených nejprve na lineární algebru v zimním a následně obecnou algebru v letním semestru je tak pokryt dvěma na sebe navazujícími texty. Paradoxem se stalo, že text navazující vznikal jako první a text předcházející jako druhý. Skutečné slovo úvodem k oběma textům (knihám) je proto k nalezení ve druhém svazku [13]. Místo dalších řečí úvodem se zde raději zaměříme na připomenutí útržků látky z lineární algebry, které možná již známe.

Martin Plešinger
v Liberci, v říjnu l. p. 2020

Poděkování bdělým očím

V první řadě bych rád poděkoval *Silvii Mitlenerové*, která ochotně věnovala svůj drahocenný čas opravám tohoto výtvoru namísto knih literárně hodnotnějších. Dále bych rád poděkoval studentkám a studentům, kteří mne intenzivně zahrnovali seznamy chyb nalezených v obou narychlo vznikajících textech. Jmenovitě *Věnceslavu Chumchalovi*, *Markétě Jánské* a *Filipu Zadražilovi*. Řadě dalších očí, na které jsem bohužel zapomněl, se omlouvám.

Martin Plešinger
v Liberci, v říjnu l. p. 2021

A co že tedy už známe?

Některé pojmy nebo objekty, které spadají do obsahu předmětu, resp. studia té části matematiky, která se nazývá *lineární algebra*, bezesporu známe.

Lineární funkce a lineární lomená funkce

Již na základní a střední škole jsme se setkali např. s pojmem *lineární funkce*, případně *lineární lomená funkce*

$$f(x) = a \cdot x + b, \qquad \text{resp.} \qquad f(x) = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d},$$

kde a, b, c a d jsou nějaká čísla. Pozoruhodné je, že ani jedna z obou funkcí není obecně lineární, neboť *zobrazení* $F(x)$ je *lineární*, pokud

$$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2) \qquad \text{a} \qquad F(x \cdot \alpha) = F(x) \cdot \alpha.$$

Výše zmíněné funkce jsou tedy lineární pouze pokud $b = 0$, $c = 0$, tedy pokud $f(x) = a \cdot x$, resp. $f(x) = \frac{a}{d} \cdot x$. Ostatně proto také ono $a \cdot x$ v první z obou funkcí nazýváme *lineárním členem* a ono b pak členem *konstantním.*

Co o lineárních lomených funkcích *pravděpodobně nevíme*, ač je to v kontextu našeho právě započnuvšího kurzu nesmírně pozoruhodné, je skládání těchto funkcí. Uvažujme

$$f(x) = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} \qquad \text{a} \qquad g(x) = \frac{k \cdot x + q}{r \cdot x + s},$$

jejich složeninou je

$$f(g(x)) = \frac{a \cdot \frac{k \cdot x + q}{r \cdot x + s} + b}{c \cdot \frac{k \cdot x + q}{r \cdot x + s} + d} = \frac{(a \cdot k + b \cdot r) \cdot x + (a \cdot q + b \cdot s)}{(c \cdot k + d \cdot r) \cdot x + (c \cdot q + d \cdot s)}.$$

Zapíšeme-li koeficienty takových funkcí do *matic* 2×2 (kdo se s pojmem matice dosud nesetkal, může s klidným srdcem přeskočit na další odstavec) tak, že

$$f(x) \longmapsto M_f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad g(x) \longmapsto M_g = \begin{bmatrix} k & q \\ r & s \end{bmatrix},$$

pak zřejmě

$$f(g(x)) \longmapsto M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot k + b \cdot r & a \cdot q + b \cdot s \\ c \cdot k + d \cdot r & c \cdot q + d \cdot s \end{bmatrix}.$$

Jejich skládání je tedy v jistém smyslu lineární.

Lineární zobrazení stejně jako práce s maticemi bude v tomto kurzu naším denním chlebem.

Lineární rovnice a soustava lineárních rovnic

Dalším pojmem, který jistě známe již ze základní školy, je *lineární rovnice*, tedy rovnice tvaru

$$a \cdot x = d,$$

případně *soustava* (dvou) *lineárních rovnic* (pro dvě neznámé)

$$\begin{aligned} a \cdot x + b \cdot y &= d, \\ k \cdot x + q \cdot y &= s. \end{aligned}$$

V prvním případě víme, že když $a \neq 0$, pak má rovnice řešení $x = \frac{d}{a}$. Ve druhém případě tušíme, že existence řešení nějakým způsobem souvisí s čímsi, co nazýváme *nezávislost* (přesněji *lineární nezávislost*) *levých stran* obou rovnic. Ti, kdo se setkali na střední škole s maticemi, také nejspíš vědí, že právě tato soustava se dá pomocí matic napsat jako jedna rovnice o jedné neznámé

$$\begin{bmatrix} a & b \\ k & q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ s \end{bmatrix},$$

jenže rovnice vektorová, jejíž neznámou je vektor o dvou složkách.

Důležité však je, že i ta jediná rovnice o jedné neznámé $a \cdot x = d$ vykazuje tři různé typy chování:

- Podmínkou $a \neq 0$ jsme si zajistili *existenci* výše zmíněného *jednoznačného řešení*. Rovnice však může mít řešení i jindy.
- Pokud $a = 0$ a zároveň $d \neq 0$. Obě strany rovnice můžeme nenulovým číslem d vydělit a dostáváme tak rovnici

  $$0 \cdot x = 1.$$

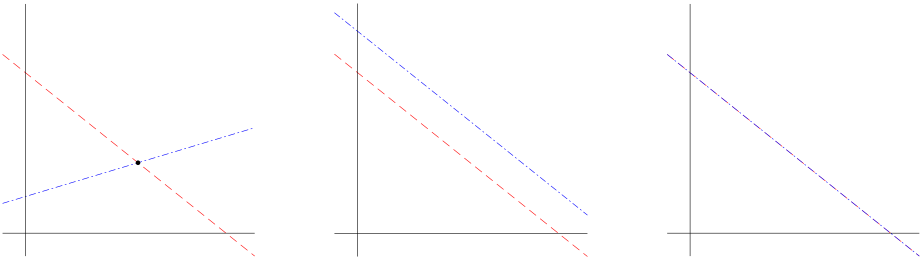
  Snadno ověříme, že žádné x, pro které by se levá strana rovnala pravé, neexistuje. Rovnice tedy *nemá řešení.*
- Pokud $a = 0$ a zároveň $d = 0$, dostáváme rovnici

  $$0 \cdot x = 0.$$

  Opět snadno ověříme, že je splněna pro jakékoliv x. Rovnice má tedy *nekonečně mnoho řešení.*

Zcela analogicky můžeme rozebrat i výše uvedenou soustavu, to však provedeme až v dalším odstavci.

Klíčový pojem lineární (ne)závislosti, pojem vektoru, studium existence a jednoznačnosti řešení soustav (mnoha) lineárních rovnic (o mnoha neznámých), ale i hledání těchto řešení bude také náplní tohoto kurzu.



Obrázek 1: Tři podstatně různé možnosti vzájemné polohy dvou přímek v rovině. Zleva: *různoběžné*, *rovnoběžné různé*, *rovnoběžné identické*.

Vybrané objekty analytické geometrie

V přídavném jménu *lineární* slyšíme latinský základ *linea*, nebo alespoň anglické slovíčko *line* — *přímka*. To je první z objektů analytické geometrie, který nás bude zajímat. Ze střední školy jistě známe *obecnou rovnici přímky* (*v rovině*)

$$\mathscr{p} : a \cdot x + b \cdot y - d = 0, \qquad \text{přičemž požadujeme aby} \quad a \neq 0 \quad \text{nebo} \quad b \neq 0.$$

Přímka je pak konkrétně množina bodů roviny splňující tuto rovnici. Pokud chceme všechny tyto body nalézt, rovnici prostě vyřešíme, neboli přejdeme k *parametrickému popisu* přímky. Je-li např. $a \neq 0$, pak

$$\mathscr{p} : \begin{cases} x = x(\tau) = b \cdot \tau + \frac{d}{a}, \\ y = x(\tau) = -a \cdot \tau, \end{cases}$$

kde τ je onen parametr. Vykreslením bodů $[x(\tau), y(\tau)]$ pro všechny možné hodnoty parametru přímka vznikne.

Pokud se podíváme na soustavu rovnic z předchozí sekce, vidíme, že tato soustava rovnic není nic jiného, než soubor dvou přímek v rovině

$$\begin{aligned} \mathscr{p} &: a \cdot x + b \cdot y - d = 0, \\ \mathscr{q} &: k \cdot x + q \cdot y - s = 0. \end{aligned}$$

Na obrázku vidíme tři situace, podstatně různé možnosti, které mohou nastat ve *vzájemné poloze dvou přímek v rovině*. Tyto možnosti odpovídají existenci jednoznačného řešení, žádného řešení a nekonečně mnoha řešení, která v rovině tvoří přímku.

V případě soustavy může být situace ještě nepatrně složitější. Některá, nebo dokonce žádná z rovnic nemusí rovnicí přímky. Snadno si rozmyslíme, že kdykoliv soustava obsahuje alespoň jednu rovnici tvaru $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$, soustava nemá žádné řešení. Zbývají situace, kdy (i) obsahuje soustava jednu rovnici přímky a jednu nulovou rovnici $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$, resp. (ii) dvě nulové rovnice. V obou těchto případech má soustava nekonečně mnoho řešení tvořících buď (i) přímku, nebo (ii) celou rovinu.

Z analytické geometrie ale známe i další objekty (rovné podobně jako přímky), které nás budou zajímat, například *roviny*. Připomeňme *obecnou rovnici roviny v prostoru*

$$\mathcal{R} : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z - d = 0,$$

přičemž opět požadujeme, aby alespoň jeden z koeficientů a, b, c byl nenulový. Jak získat parametrický popis roviny, stejně jako zopakování si pojmů jako je *normálový vektor* a *směrové vektory*, již ponecháváme na čtenáři. Nicméně je zřejmé, že po formální stránce můžeme s rovnicí nakládat podobně jako v případě přímky.

Analogicky můžeme uvažovat i soubor dvou rovin v prostoru

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z - d = 0, \\ \mathcal{S} &: k \cdot x + q \cdot y + r \cdot z - s = 0, \end{aligned}$$

neboli soustavu dvou rovnic o třech neznámých. Rozmyslet si, jakou vzájemnou polohu mohou mít dvě roviny v prostoru, také již ponecháváme na čtenáři. Každopádně pokud roviny nejsou rovnoběžné, protínají se a jejich průnikem je přímka. Soubor dvou rovin, resp. soustava jejich obecných rovnic pak představuje něco jako obecnou rovnici přímky v prostoru; jak nalézt parametrický popis takové přímky opět ponecháváme na čtenáři.

Formálně jsme opět zabředli do řešení soustav lineárních rovnic. Nicméně geometrická představa může dát dobrý vhled do toho, co se při řešení takové soustavy děje a kam míříme, a naopak lineární algebra nám dává k dispozici robustní aparát, jak analyticko-geometrické úlohy řešit.

Detailněji se podíváme na to, jak lze zavést v prostoru vzdálenosti a úhly, abychom u podobných úloh dokázali své odpovědi i kvantifikovat — jaké úhly svírají objekty nerovnoběžné, jaké jsou vzdálenosti rovnoběžných objektů.

Další doporučená literatura

Ve zbytku úvodu se pokusíme krátce doporučit vybranou literaturu. Literatura je rozdělena do tří ne příliš ostře vymezených oddílů. První tři oddíly zahrnují literaturu, řekněme, více základní, odpovídající úvodním kurzům lineární algebry. Tyto oddíly se pak liší spíše formálně, tedy formou: totiž při pohledu na publikaci z prvního oddílu si čtenář pravděpodobněji řekne „ejhle kniha“, zatímco při pohledu na publikaci z druhého pravděpodobněji „ejhle skriptum“, o třetím není třeba dlouze diskutovat. V oddílu posledním jsou pak vybrané publikace obsahově v jistém smyslu navazující na publikace základní, zaměřené zejména na hlubší studium pojmu *matice*.

Základní literatura (knihy)

- [1] J. Bečvář: *Lineární algebra*, MatfyzPress (2019).
- [2] L. Bican: *Lineární algebra a geometrie*, Academia (2002).
- [6] M. Hladík: *Lineární algebra (nejen) pro informatiky*, MatfyzPress (2019).
- [11] L. Motl, M. Zahradník: *Pěstujeme lineární algebru*, Karolinum (2003).

Základní literatura (skripta)

- [3] Z. Dostál, V. Vondrák: *Lineární algebra*, VŠB-TUO & ZČU (2012).
- [12] P. Olšák: *Úvod do algebry zejména lineární*, FEL ČVUT (2007).
- [16] J. Pytlíček: Cvičení z algebry a geometrie, FJFI ČVUT (2008).
- [15] J. Pytlíček: Lineární algebra a geometrie, FJFI ČVUT (2008).

Základní literatura (neliteratura)

- [17] G. Sanderson (3Blue1Brown): *Essence of linear algebra*, YouTube (2016). YouTube: list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab
- [18] G. Strang: *Lectures on Linear Algebra*, MIT & YouTube (2009). YouTube: list=PL49CF3715CB9EF31D

Navazující literatura

- [4] E. J. Duintjer Tebbens, I. Hnětynková, M. Plešinger, Z. Strakoš, P. Tichý: *Analýza metod pro maticové výpočty. Základní metody*, MatfyzPress (2012).
- [5] F. R. Gantmacher: *The theory of matrices*, AMS (2000).
- [7, 8] R. A. Horn, C. R. Johnson: *Matrix analysis* & *Topics in matrix analysis*, CUP (2011, 2013).

Kapitola 1

Základní stavební kameny — vektory & matice

Po celou dobu tohoto kurzu se budeme setkávat se dvěma speciálními matematickými objekty, budou to *vektor* a *matice*, jak již napovídá název kapitoly. Než se však dostaneme k alespoň nějaké prvotní konkretizaci těchto lineárně-algebraických pojmů, připomeneme si několik pojmů množinových, resp. číselných. Spíše než připomenutí se však bude jednat o jakési vágní vymezení.

1.1 Několik slov k množinám a uspořádaným množinám — n-ticím

S pojmem *množina* budeme pracovat poměrně naivním způsobem, bude pro nás synonymem souhrnu, nebo souboru objektů; bude jakýmsi pytlíčkem, který může být prázdný, nebo může obsahovat nějaké konkrétně vyjmenované nebo dostatečně jasně specifikované objekty. Přesnějším vymezením pojmu se zabývá teorie množin. Ukazuje se totiž, že naše naivní vymezení může vést k různým nepříjemným paradoxům (viz např. Russelův paradox).

Představa množiny jako pytlíčku s objekty nicméně dobře vystihuje jeden podstatný jev — neuspořádanost prvků množiny. Kromě množin ale budeme často potřebovat pracovat s jakosi uspořádanou variantou (můžeme si představit, že objekty z pytlíčku vyndáváme, což činíme v nějakém konkrétním pořadí). Základním stavebním prvkem bude tzv. *uspořádaná dvojice*. Uspořádanou dvojici zpravidla značíme (a, b), a můžeme ji definovat např. jako množinu

$$(a, b) = \Big\{ \{a\}, \big\{\{a\}, b\big\} \Big\}.$$

Tedy jako množinu se dvěma prvky — opět množinami: jedna z nich je přitom vždy jednoprvková a obsahuje první prvek uspořádané dvojice, druhá pak specifikuje druhý prvek uspořádané dvojice.

Úloha 1.1. *Čtenář si rozmyslí, proč a k čemu jsou jednotlivé množinové závorky uvedené v definici uspořádané dvojice vhodné. Dobré je se podívat např. na uspořádanou dvojici (a,a), případně $(a,\{a\})$.*

Dále je dobré si rozmyslet, jak analogickým způsobem zapsat uspořádanou trojici.

1.1.1 Kartézský součin množin

Připomeňme, že máme-li dvě množiny, řekněme

$$\mathscr{M} = \{1,2,3\}, \quad \mathscr{N} = \{A,B\},$$

o třech, resp. dvou prvcích, můžeme zkonstruovat jejich tzv. *kartézský součin*, tedy množinu označovanou $\mathscr{M} \times \mathscr{N}$, která bude obsahovat všechny *uspořádané dvojice* takové, kde první prvek dvojice je z první množiny a druhý z druhé, tedy

$$\begin{aligned} \mathscr{M} \times \mathscr{N} = \{\ &(1,A),\ (2,A),\ (3,A),\\ &(1,B),\ (2,B),\ (3,B)\ \}. \end{aligned}$$

Množina nemá nijak předepsané pořadí prvků, nicméně zde jsme je záměrně vypsali do tvaru jakési „tabulky“, do jejíhož horního záhlaví bychom mohli zapsat prvky množiny $\mathscr{M}$ a do jejíhož levého záhlaví bychom mohli zapsat prvky množiny $\mathscr{N}$. Speciálně kartézský součin množiny $\mathscr{M}$ se sebou samou budeme značit

$$\mathscr{M}^2 = \mathscr{M} \times \mathscr{M}.$$

Zcela analogicky můžeme uvažovat kartézský součin většího počtu množin. Pokud budeme mít navíc ještě množinu

$$\mathscr{K} = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\},$$

můžeme uvažovat kartézský součin tří množin jako množinu

$$\begin{aligned} \mathscr{M} \times \mathscr{N} \times \mathscr{K} = \{\ &(1,A,\alpha),\ (2,A,\alpha),\ (3,A,\alpha), (1,B,\alpha),\ (2,B,\alpha),\ (3,B,\alpha),\\ &(1,A,\beta),\ (2,A,\beta),\ (3,A,\beta), (1,B,\beta),\ (2,B,\beta),\ (3,B,\beta),\\ &(1,A,\gamma),\ (2,A,\gamma),\ (3,A,\gamma), (1,B,\gamma),\ (2,B,\gamma),\ (3,B,\gamma),\\ &(1,A,\delta),\ (2,A,\delta),\ (3,A,\delta), (1,B,\delta),\ (2,B,\delta),\ (3,B,\delta)\ \} \end{aligned}$$

všech *uspořádaných trojic*. Kdybychom zde chtěli prvky kartézského součinu srovnat do pomyslné „tabulky“ jako v předchozím případě, tabulka by byla trojrozměrná.

Hravě si však rozmyslíme, že na kartézský součin $\mathscr{M} \times \mathscr{N} \times \mathscr{K}$ se můžeme, při troše dobré vůle, dívat jako na

$$\mathscr{M} \times (\mathscr{N} \times \mathscr{K}), \quad \text{nebo} \quad (\mathscr{M} \times \mathscr{N}) \times \mathscr{K}.$$