PŘEDPOKLADY ŽÁKA PRO ŘEŠENÍ ÚLOH Z MATEMATIKY

DIAGNOSTIKA PŘÍČIN NEÚSPĚCHU A NÁVRHY OPATŘENÍ K JEJICH ODSTRANĚNÍ

PETR EISENMANN A KOLEKTIV

KAROLINUM

Předpoklady žáka pro řešení úloh z matematiky
Diagnostika příčin neúspěchu a návrhy opatření k jejich odstranění

Petr Eisenmann a kolektiv

Recenzovaly:
doc. PaedDr. Mária Slavíčková, Ph.D.
prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Autoři:
Petr Eisenmann
Jiří Přibyl
Magdalena Krátká
Lucie Loukotová
Jiří Cihlář
Ondřej Pešout

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU
Národní plán obnovy
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Publikace byla vydána za podpory Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy a Národního plánu obnovy v rámci projektu Transformace pro VŠ na UK (reg.č. NPO_UK_MSMT-16602/2022).

Vydala Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum
Praha 2023
Redakce Václav Hozman
Grafická úprava Jan Šerých
Sazba DTP Nakladatelství Karolinum
Vydání první

T A Č R

Monografie *Předpoklady žáka pro řešení úloh z matematiky* byla vytvořena se státní podporou Technologické agentury ČR v rámci Programu ÉTA 2, projektu TL02000200 – *Diagnostika příčin neúspěchů žáka při řešení úloh z matematiky a návrh opatření k jejich odstranění.*

ISBN 978-80-246-5582-6
ISBN 978-80-246-5669-4 (pdf)

Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

OBSAH

/1/ Úvod

Řešení úloh je jednou z hlavních náplní výuky matematiky na základní a střední škole. Někteří žáci jsou úspěšní téměř vždy, jiní zase skoro nikdy, někomu vyhovují pouze úlohy, ve kterých se procvičují naučené algoritmy, jinému zase určité téma. Pro mnoho žáků jsou zakletým tématem geometrické konstrukční úlohy, jiní zase tápou v úlohách vyžadujících základní kombinatorické úvahy. Popsat předpoklady žáka k úspěšnému řešení matematických úloh je tedy velice těžký a komplexní úkol. A pokusit se je zjistit u konkrétního žáka, navíc relativně rychle a bez použití jiných odborností, jako je např. psychologie, zní přinejmenším troufale. Přesto se v knize, kterou držíte v ruce, o konstrukci diagnostického nástroje, který právě tyto předpoklady žáka zjišťuje, pokusíme.

Smysl tento úkol má – na rozdíl od nestabilních charakteristik jedince, jako například emocí či pozornosti, kolísá míra matematického výkonu a schopnosti se matematice učit v čase méně (Cígler, 2018; Nuutila et al., 2018; Roick & Ringeisen, 2018), a má tedy význam předpoklady žáka[1] k úspěš-

1 V celé publikaci používáme označení žák ve smyslu pedagogické kategorie, tj. označujeme tak žákyně i žáky. Termínem učitel pak označujeme profesní skupinu, tj. označujeme tak učitelky a učitele. Analogicky pak pro další kategorie, jako je např. experimentátor atp.

nému řešení úloh ve vyučovacím procesu zjišťovat. V minulosti byly podobné záměry cíleny především na vyhledávání matematicky nadaných žáků (např. Wagner & Zimmermann, 1986; Niederer et al., 2003). To naším cílem není. Zjišťovat předpoklady žáků k úspěšnému řešení úloh chceme u všech žáků, a to s cílem pomoci učiteli odstranit překážky, které žákům brání v úspěšném řešení úloh.

Publikace přináší ucelený popis výzkumu provedeného v rámci projektu Technologické agentury České republiky *Diagnostika příčin neúspěchu žáka při řešení úloh z matematiky a návrh opatření k jejich odstranění* realizovaného na Přírodovědecké fakultě Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem v letech 2019–2022.

Monografie obsahuje celkem sedm kapitol, které po úvodu a vymezení teoretických východisek přináší přehled osmi charakteristik (tzv. komponent) struktury popisujících předpoklady žáka k řešení úloh v matematice: *matematická citlivost, matematická tvořivost, čtenářská gramotnost, počtářská dovednost, pracovní paměť, tendence k užití algoritmu, sebeposouzení* a *motivace k učení se matematice*. Popsán je jak důvod jejich zařazení do vytvořené struktury, tak operacionalizace jejich diagnostiky. Hlavním výstupem projektu je totiž certifikovaná diagnostická sada (určená pro 8. či 9. ročník základních škol a odpovídající ročníky víceletých gymnázií), která učiteli umožní stanovit míru výše uvedených charakteristik u jejich různých proměnných (zadání testů diagnostické sady je přílohou této monografie). Tyto hodnoty mohou být vnímány jako východiska pro přijetí určitých opatření, která by měla vést ke zlepšení úspěšnosti žáka v řešení matematických úloh. Návrhy těchto opatření realizovatelných v běžné učitelské praxi pak popisuje šestá kapitola monografie, jíž ovšem předchází podrobný popis metodologie celého výzkumu, a především jeho výsledků včetně interpretace.

Teoretická východiska pro formulaci struktury, která popisuje předpoklady žáka k řešení úloh, jsme čerpali především ze závěrů výsledků základního výzkumu uskutečněného v rámci projektu Grantové agentury České republiky *Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi* z let 2012–2014. Zde byla formulována tehdy čtyřprvková struktura zahrnující obecnou inteligenci, čtenářskou gramotnost, tvořivost a schopnost využívat stávající znalosti v matematice. Popsána je např. v (Eisenmann et al., 2015), kde je pro ni i zaveden název *Culture of problem solving* (CPS). Tento název a zkratku budeme i nadále používat pro označení struktury, která popisuje předpoklady žáka k řešení úloh. Proces změny a obohacení původní struktury CPS o výše již zmíněné nové komponenty popisující i metakognitivní dovednosti bude v knize dále zdůvodněn a popsán.

Multioborovost zkoumané problematiky koresponduje se složením autorského kolektivu, který sestává z didaktiků matematiky, statistiků a psychologa.

Kniha je určena nejen výzkumníkům v oblasti didaktiky matematiky a pracovníkům vysokých škol připravující budoucí učitele, ale i samotným učitelům a studentům učitelství matematiky. Jednotlivé kapitoly jsou přirozeně poměrně úzce provázány, žádnou z nich tedy nelze číst samostatně bez opory o některé jiné. Kniha je zakončena několika přílohami a seznamem elektronických příloh.

/**2**/

Úloha a proces jejího řešení

V rámci této kapitoly představujeme východiska, o která jsme se při vývoji diagnostické sady opírali. Protože se zabýváme žákovými dispozicemi k řešení matematických úloh, předkládáme svoje vymezení matematické úlohy a také nabízíme určitý pohled na proces jejího řešení.

Při popisu žáka z pohledu jeho předpokladů k řešení úloh se dotýkáme dvou základních oblastí, a to kognitivní a metakognitivní. V rámci každé z nich lze nahlížet na proces řešení úlohy svébytným způsobem. V rámci každé z těchto oblastí také sledujeme určité proměnné, o kterých se domníváme, že se přímo dotýkají žákovy dovednosti řešit matematické úlohy. Nicméně, chceme-li zlepšit žákovu dovednost řešit úlohy, je zapotřebí se zaměřit nejen na jeho dispozice, ale také na samotný proces řešení úlohy a uvědomit si, kdy jsou jednotlivé kroky řešení procesu závislé na zmíněných proměnných. Tím získáme určitou představu, ve které fázi procesu řešení úlohy žák je, a jak na žáka působit, aby vznikl potenciál dosáhnout požadované změny.

Věříme, že vhodným propojením níže představených modelů procesu řešení úlohy vzniká model, který propojuje obě oblasti – kognitivní i metakognitivní – z hlediska procesu řešení úlohy do jednoho organického celku. V prvním případě jde o pohled „z vnějšku“ na proces řešení úlohy, v našem prostředí bychom jej mohli označit za pohled učitele, a ve druhém případě jde o pohled „zevnitř“, který bychom mohli označit za pohled žáka.

2.1 MATEMATICKÁ ÚLOHA

Matematická úloha je do značné míry obecný pojem, jehož vymezení závisí na záměru, s jakým k úlohám přistupujeme. V naší práci se zaměřujeme na takové matematické úlohy, se kterými se žáci běžně setkávají ve výuce matematiky. I přesto je to však velmi bohatá množina, již se řada autorů snaží strukturovat a popsat ji v závislosti např. na možných komponentách samotné úlohy nebo v závislosti na míře autonomnosti řešitele při jejím řešení.

Např. Kopka (1999) a Kuřina (2011), který vychází z Vyšína (1972), uvádějí tři do značné míry podobné kategorie úloh zohledňující pozici řešitele:

- rutinní úloha (cvičení) – jde o úlohu, kde je řešiteli předem znám postup, případně je požadovaný postup přímo součástí zadání;
- nerutinní úloha, kde řešitel kombinuje více algoritmů;
- problémová úloha – jde o úlohu, kde postup řešení není řešiteli znám, a proto vyžaduje tvořivý přístup.

V naší studii uvažujeme o všech typech matematických úloh, tedy jak o úlohách, kde by postup měl být žákovi známý, tak o úlohách, které vyžadují jeho tvůrčí přístup. V následujícím textu budeme slovo úloha používat v tomto širším významu.

U samotných úloh pak můžeme nacházet určité složky či vnitřní strukturu, která je patrná bez ohledu na obsahové zaměření či obtížnost úlohy. Mareš (1980) na základě prací L. M. Fridmana uvádí čtyři složky úlohy: (a) předmětnou (věcnou) oblast danou objekty, o nichž úloha pojednává; (b) vztahy mezi těmito objekty; (c) požadavky a instrukce o cíli, resp. otázku a (d) operátor, tj. posloupnosti operací, jež je třeba vykonat.

Z hlediska požadovaného úkonu žáka lze najít typologii úloh např. u Polyi (2004), který rozlišuje úlohy (a) početní; (b) konstrukční; (c) určovací a (d) důkazové. Kuřina (2011) upřesňuje, že typ úlohy je dán „signálním slovem“ a přidává kategorii (e) rozhodovací.

Pozornost můžeme zaměřit také na samotné zadání. V běžném výukovém procesu se naši žáci setkávají s úlohami, které mají nejrůznější formu zadání. Jde jednak o úlohy aplikační (také reálné či praktické) a úlohy ryze matematické (Polya, 2004[2]; Fridman & Tureckij, 1989). Hejný et al. (1990), resp. Fridman a Tureckij (1989) rozlišují mezi úlohou standardní, která je uvozena jednoznačnou výzvou (např. řešte rovnici) a nestandardní (např. slovní nebo kombinatorická úloha).

2 Jedná se o přetisk 2. vydání z roku 1973 s novou předmluvou J. H. Conwaye. Nadále budeme čtenáře odkazovat na český překlad (Polya, 2016), který je pro něj dostupnější.

Z hlediska úplnosti zadání lze také úlohy rozdělit na (a) dobře zadané; (b) nedostatečně zadané a (c) přezadané. V tomto kontextu Fridman (podle Mareše, 1980) uvažuje o tzv. stupni určenosti úlohy, míře zobecnění a míře úplnosti úlohy.

Nakonec ještě zmiňme dimenzi náročnosti úlohy, která je dána předpokládanými nutnými znalostmi pro vyřešení úlohy. Ty samozřejmě souvisí s obsahovým zaměřením uvažované úlohy. Ve studii jsme se snažili obsáhnout celý obsah školské matematiky vymezený rámcovým vzdělávacím programem pro 2. stupeň základní školy (NPI, 2021) (dále jen RVP ZV).

2.2 MODEL ŘEŠENÍ MATEMATICKÉ ÚLOHY

Nejstarší pokusy o popis procesu řešení problému zaujímají makroskopický pohled. Deweyeho (1933) model je rozdělen do určitých kroků: (a) definování problému; (b) analyzování problému; (c) určení kritérií pro optimální postup řešení; (d) navržení různých řešení; (e) ověření navržených řešení; (f) výběr řešení a (g) návrh strategií pro další řešení. Na tento model řešení problému se odkazuje řada pozdějších autorů. Mezi nimi také Polya (2016) při vytváření modelu řešení matematické úlohy, který je popsán pomocí čtyř fází:

- porozumění podstatě úlohy;
- vypracování plánu postupu řešení;
- realizace plánu (řešení);
- zpětná kontrola.

Pro naše účely jsme se přichýlili k syntéze dvou přístupů – Reusserova (1985) didaktického přístupu a metakognitivního přístupu prezentovaného v (Prezl et al., 2003). Nově vytvořený model by měl umožnit nejen sledovat proces řešení úlohy, ale také na jeho základě tento proces ovlivňovat, a to ve sledovaných charakteristikách žáka (*matematická citlivost, matematická tvořivost, čtenářská gramotnost, pracovní paměť* a další), jejichž podstata není ani pouze didaktická, ani pouze metakognitivní.

Základní ideou je, že Reusserův model reprezentující didaktický pohled na situaci obohacujeme o prvky převzaté z modelu reprezentujícího metakognitivní pohled na situaci (Prezl et al., 2003). Je možné tuto situaci nahlížet tak, že se jedná o dvě dimenze sledovaného procesu. Dodejme, že Reusserův[3] model je modifikací již existujícího modelu Kintsche a Greena (1985).

3 Článek (Reusser, 1985) je inspirativní nejen tím, že popisuje samotný model, ale také úvahy, úskalí a otázky, které se objevily při jeho tvorbě.

2.2.1 REUSSERŮV MODEL ŘEŠENÍ (SLOVNÍ) ÚLOHY

Reusser (podle Vondrová et al., 2019, s. 18) představuje didaktický model procesu řešení úlohy. Ten sice primárně zpracovává proces řešení slovních úloh, avšak je dobře využitelný při popisu řešení matematické úlohy v obecném slova smyslu, protože stejné procesy jsou jednoznačně identifikovatelné i při řešení jakékoliv matematické úlohy. Reusserův upravený model sestává z pěti komplexních fází:

- (R1) Zpracování vstupu: Porozumění textu úlohy, ve zobecněném pohledu porozumění zadání.
- (R2) Vytvoření situačního modelu: Porozumění situaci, souvislostem a problému úlohy a generování otázky.
- (R3) Konstrukce matematického modelu: Matematizace situační představy. V případě numerického či algebraického kontextu probíhá ve dvou úrovních:
  - a) Žák vytváří nenumerický, ale již abstraktní model.
  - b) Žák vytváří numerický formální (algebraický) model.
- (R4) Provedení výpočtu, provedení konstrukce, resp. analogických procesů, které vedou ke konkrétnímu výsledku.
- (R5) Vytvoření odpovědi a interpretace výsledku na podkladu věcné představy problému.

2.2.2 METAKOGNITIVNÍ MODEL ŘEŠENÍ ÚLOHY

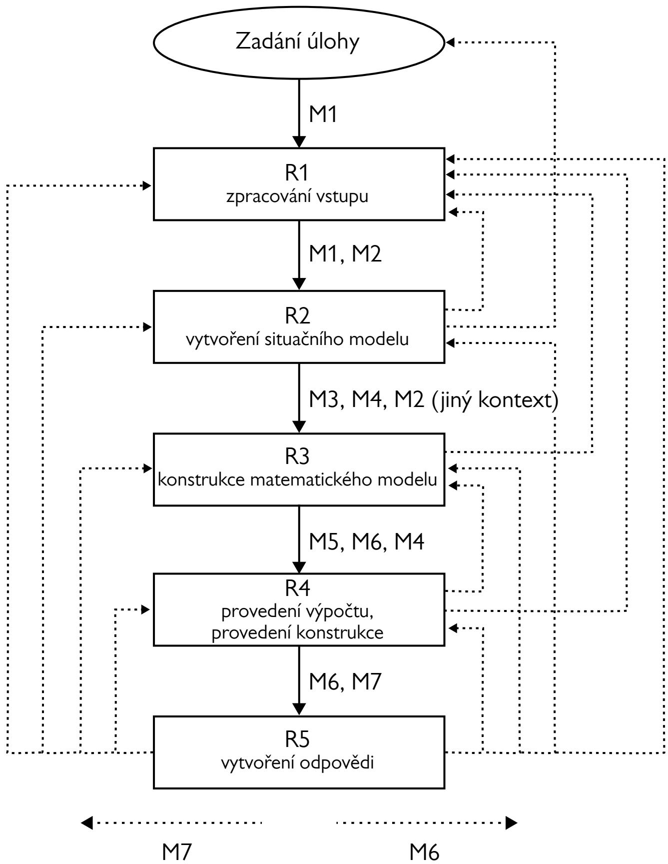
Tento pohled na proces řešení úlohy je nabízen psychology (Prezl et al., 2003). Upozorňují na skutečnost, že proces řešení úlohy je cyklické povahy – cyklů je či může být více, přičemž všechny fáze jednoho průchodu cyklu lze popsat následovně:

- (M1) Rozpoznat nebo identifikovat problém, obtíž či překážku v úloze.
- (M2) Mentálně vymezit a reprezentovat problém.
- (M3) Vytvořit si (navrhnout) strategii řešení úlohy a strategii řešení, tj. odstranění problému.
- (M4) Uspořádat si znalosti týkající se problému.
- (M5) Alokovat mentální i fyzické zdroje potřebné pro řešení úlohy.
- (M6) Reflektovat samotný průběh řešení a ověřovat, zda vede k cíli.
- (M7) Vyhodnotit řešení problému z hlediska očekávaného výstupu – přesnost, typ odpovědi apod.

Důležitým faktem je, že daný cyklus nemusí při svém průchodu obsahovat všechny fáze. V řadě případů je možné, že daný cyklus má jen dvě fáze. Druhou skutečností, na kterou upozorňujeme, je, že slova problém a úloha zde nevystupují synonymně. Úloha může mít více problémů – cílů, kterých se má dosáhnout, a také může mít problémy, které jsou vlastní danému řešiteli, tj. pro jednoho se jedná o obtíž, kterou musí odstranit, a pro jiného nikoliv.

2.2.3 SYNTETIZUJÍCÍ MODEL PROCESU ŘEŠENÍ ÚLOHY

Syntézou obou modelů vznikl model, jehož schéma předkládáme na obrázku 2.2.1. Tento model sleduje oba úhly pohledu a dává do určité interakce oba přístupy. Znovu připomeňme, že proces řešení úlohy obvykle není přímočarý. Žák průběžně provádí reflexi postupu řešení (M6), respektive vyhodnocuje (dílčí) výstupy (M7), včetně situace, kdy si neví rady, jak postupovat dál, a na základě toho se může rozhodnout vrátit se do kterékoli předchozí fáze R1–R5. Jinými slovy, proces řešení úlohy se může v jednotlivých fázích cyklit, přičemž právě tyto cykly jsou vyvolány žákem-řešitelem a on se tak znovu dostává do již dřívějších stavů řešení úlohy.



Obr. 2.2.1: Model procesu řešení úlohy

Poznamenejme, že některé fáze (jak z hlediska didaktického, tak z hlediska metakognitivního úhlu pohledu) uchopují učitelé vědomě. Například běžně vyzývají žáky, aby provedli sémantickou zkoušku, tedy srovnání výsledku řešení s kontextem zadání úlohy. Avšak stává se také, že je některé fáze dosaženo jen zdánlivě nebo formálně. Např. Novotná (2000) nebo Vondrová et al. (2019) poukazují na vedení žáků k tvorbě zápisu (nebo také legendy), přičemž učitelé to deklarují jako tvorbu situačního modelu, avšak žáci tuto fázi s porozuměním podstaty problému nijak nespojují. Podobně také Vondrová (2019) upozorňuje, že řada žáků sémantickou zkoušku spontánně neprovádí, resp. že ji nepovažují za nedílnou součást procesu řešení úlohy. Stejná situace může nastat například v případě diskuse geometrické úlohy a dalších.

Na závěr poznamenejme, že náš syntetizující model explicitně neřeší, jak jednotlivé fáze probíhají. Například u fáze R3 jsou zmíněny dvě úrovně – nenumerický a numerický (algebraický) model, které se mohou asociovat s určitým způsobem řešení. Už samotná fáze R2 může probíhat tak, že si žák v rámci tvorby situačního modelu nakreslí nějaký obrázek či schéma. Řekli bychom, že začíná úlohu řešit graficky. Na základě této kresby či schématu může žák získat vhled do úlohy, který Liljedahl (2005) označuje jako *moment osvícení*, a který umožní žákovi nejen přejít do další fáze, ale také mu umožní danou úlohu vyřešit. Stejně tak fáze R4 může probíhat za pomoci různých výpočetních strojů, počínaje obvyklými kalkulačkami, přes zapojení osobních počítačů a konče použitím SW jako je GeoGebra, Wolfram Alpha, nebo dokonce PhotoMath. V (Přibyl & Eisenmann, 2014) jsou tyto aspekty řešení úlohy vnímány jako určité rozměry celého procesu řešení úlohy. V našem výzkumu v tuto chvíli nehrají žádnou roli, neboť ten je zaměřen na odhalování obtíží žáka při řešení úloh, a různí žáci mohou mít rozdílné obtíže v rámci stejné fáze.

/**3**/

Předpoklady žáka k řešení úloh

Tato kapitola představuje jednotlivé komponenty struktury předpokladů žáka k řešení úloh (v kapitole 1 byla zavedena pro tuto strukturu zkratka CPS) a jejich vymezení. Konkrétně, v oddílech 3.2 až 3.9 jsou popsány jednak důvody zařazení každé z těchto komponent do struktury CPS, dále popis sledovaných proměnných a jejich operacionalizace. Jedinou výjimku tvoří úvodní oddíl 3.1, v němž objasňujeme, na které faktory ovlivňující dovednost žáka řešit úlohy se v našem výzkumu zaměřujeme, a na které naopak vědomě rezignujeme.

Každý z oddílů 3.2 až 3.9 je zakončen popisem vývoje příslušného testu výzkumné sady, neboť vhodně dokresluje obsah dané komponenty. Zde uvádíme i podrobný popis různých variant těchto testů (listinné A a B, elektronické, jejichž znění je elektronickou přílohou knihy[4]) s příslušným zdůvodněním. Na základě zpracování dat získaných během výzkumu došlo následně k úpravě těchto testů do podoby výsledné diagnostické sady, která je určena

4 Elektronické přílohy monografie jsou k nalezení na webové stránce: https://reseniuloh.ujep.cz/elektronicke-prilohy-monografie/

učitelům pro použití v praxi a o níž hovoří kapitola 6. Výsledná diagnostická sada je samostatnou přílohou monografie (P1). Rozdíly mezi výzkumnou sadou a výslednou diagnostickou sadou jsou popsány u jednotlivých komponent v kapitole 4 a souhrnně v úvodu kapitoly 6.

3.1 FAKTORY OVLIVŇUJÍCÍ DOVEDNOST ŽÁKA ŘEŠIT ÚLOHY

Je obecně přijímaným faktem, a multimédii často akcentovaným, že je matematika na základní škole vnímána jako obtížný a řadou žáků neoblíbený předmět (Pavelková & Hrabal, 2012). Dále se také ukazuje, že její obliba s rostoucím věkem žáků klesá (Smetáčková, 2018). Otázkou pak je, co způsobuje tyto postoje žáků.

Jak uvádí Mullis et al. (2012, s. 19), pravidelně se opakující výzkumy ukazují, že existuje přímá souvislost mezi oblibou předmětu matematika u žáků a jejich úspěšností v tomto předmětu. Vzhledem k povaze výuky matematiky na základní škole je zřejmé, že školní úspěšnost hodnocená známkou se opírá především o řešení rutinních, ale v některých případech i nerutinních, úloh.

Je tedy nasnadě otázka: „Co ovlivňuje úspěšnost žáka při řešení úloh v matematice?“ Dlouhodobě nabízených odpovědí je celá řada. Nejprve se společně podívejme na některé dříve nabízené odpovědi, které nám umožní zasadit sledovanou problematiku do určitého rámce, a umožní tak čtenáři nahlédnout, jak obsáhlá sledovaná problematika je.

Samotné faktory, které ovlivňují proces řešení úlohy, můžeme rozdělit do několika základních skupin, přičemž tyto skupiny se vzájemně ovlivňují.

První skupina je tvořena úlohami jako takovými. Problematice úloh a procesu jejich řešení jsme se věnovali v kapitole 2.

Druhá skupina je tvořena vnitřním světem řešitele, tj. jeho předpoklady k řešení úloh. Sem spadá např. kognitivní inteligence, tvořivost, motivace, kognitivní struktura, zkušenost, schopnost pozorovat, citlivost k výzvám atp. Do této skupiny však spadají i různé handicapy, jako např. dyskalkulie či dyslexie.

Třetí skupina je tvořena vnějším světem řešitele, kam spadá např. zdravotní stav řešitele, fyzické prostředí a jeho změny, didaktické a školní faktory nebo sociálně-kulturní klima, ve kterém se řešitel krátkodobě, ale i dlouhodobě nachází. Může se například jednat o vyloučenou lokalitu nebo naopak o podnětné prostředí.

Lze říci, že námi představené rozdělení faktorů je určitou analogií k Popperově ideji tří světů (Hejný & Kuřina, 2000).

Dovednost řešit úlohy je komplexní soubor faktorů daného jedince, které se podílejí na procesu řešení úlohy, jsou vlastní danému jedinci a mohou se vzájemně ovlivňovat. Vznikají teorie, které se snaží danou problematiku