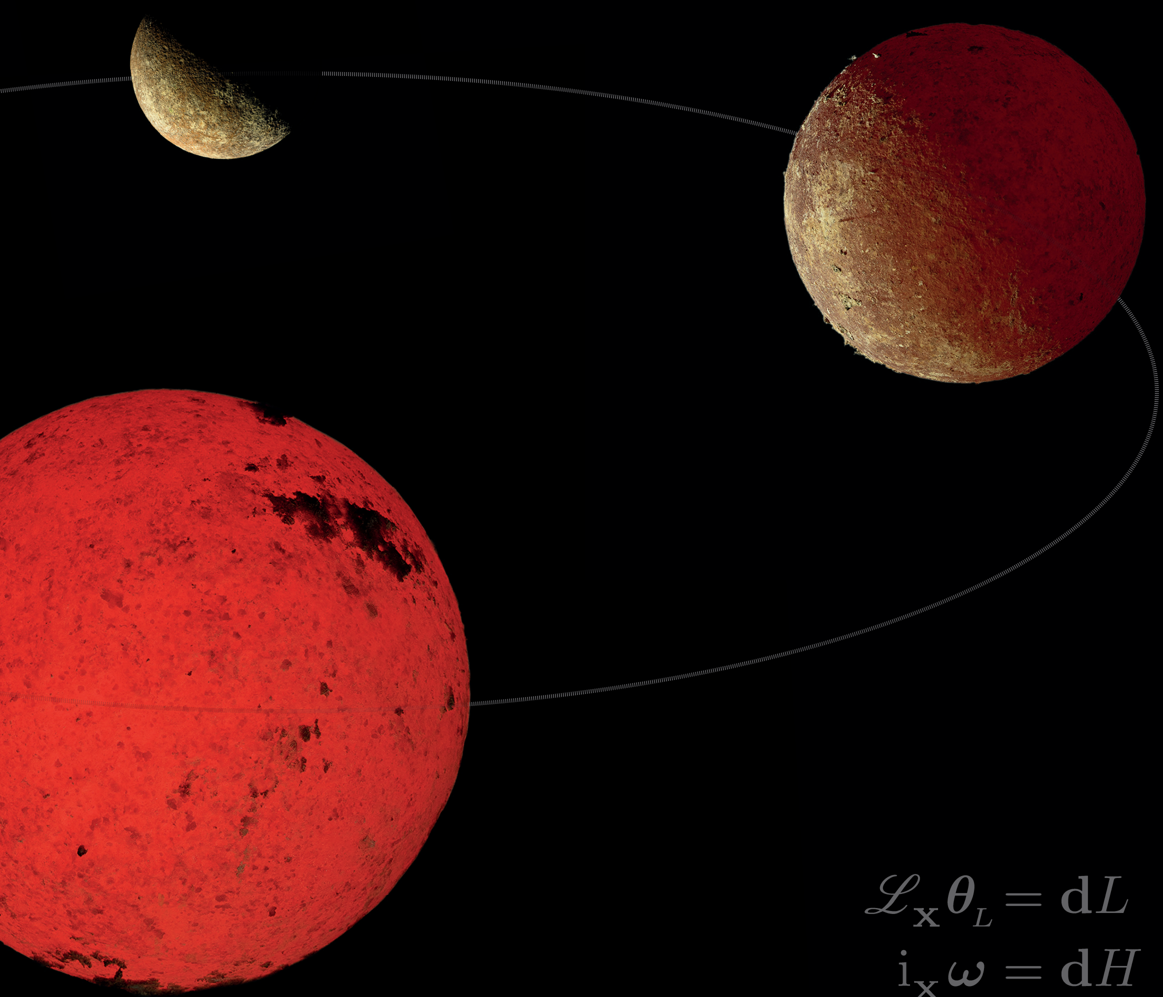
TEORETICKÁ MECHANIKA VE TŘECH KNIHÁCH

JIŘÍ PODOLSKÝ

KAROLINUM / MATFYZPRESS



$$\mathscr{L}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\theta}_L = \mathrm{d}L$$
$$\mathrm{i}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}H$$

Teoretická mechanika ve třech knihách

Jiří Podolský

Recenzovali:
doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc.
prof. RNDr. Jan Novotný, CSc.

Vydala Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

Univerzita Karlova
nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty MatfyzPress

Praha 2024
Obálka s použitím fotografie Jana Dotřela
DTP Nakladatelství Karolinum
Sazba Jiří Podolský
Vydání první

ISBN 978-80-246-5746-2 (Karolinum)
ISBN 978-80-7378-499-7 (MatfyzPress)
ISBN 978-80-246-5747-9 (pdf)

Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

MatfyzPress

www.matfyzpress.cz

Rozum je nepochybně slabý, když se poměřuje
svým nikdy nekončícím úkolem . . .
Přesto výtvory intelektu přežívají rušně se ženoucí generace
a století za stoletím šíří světlo a teplo.
Utěšeni touto myšlenkou vraťme se v těchto neklidných dnech
k památce Newtonově, který byl dán lidstvu před třemi sty lety.

Albert Einstein, vánoce 1942,
esej „Isaac Newton“ v *The Manchaster Guardian*,
česky v knize *Z mých pozdějších let*, 1995, str. 147

Obsah

II KNIHA DRUHÁ:

Tři knihy

Konvolut tří knih, který držíte v ruce, představuje ucelený a navzájem propojený soubor učebnic newtonovské mechaniky. Vznikal postupně během minulého čtvrtstoletí jako učební text pro potřeby kurzů *Teoretická mechanika* a *Proseminář teoretické mechaniky*, které od roku 1995 respektive 2004 přednáším na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy.

Výklad teoretické mechaniky při *klasické přednášce* určené pro 2. ročník studia v zimním semestru, které odpovídá obsah *KNIHY PRVNÍ*, se opírá o standardní parametrizaci pomocí zobecněných souřadnic a rychlostí, případně kanonických hybností, a o složková vyjádření fyzikálních veličin. To má své dobré důvody historické, didaktické i početní. Od počátku 20. století však byly pojmy a zákony mechaniky postupně přeformulovány do abstraktního, elegantního jazyka diferenciální geometrie. Oproštění od souřadnic a složek veličin vedlo k hlubšímu pochopení podstaty mechaniky, zejména její symplektické struktury. Systematický výklad tohoto *geometrického pojetí* klasické mechaniky v české literatuře dosud chyběl, a právě to je obsahem *KNIHY DRUHÉ*. Lze ji dobře použít jako studijní podklad volitelného prosemináře. Trilogii uzavírají *hlavní typové příklady*, které by v průběhu semestru měly být spočítány na cvičeních. Pečlivě zvolené příklady v *KNIZE TŘETÍ*, které jsou všechny vzorově vyřešeny, ilustrují obecné teoretické metody a vztahy. Tím pomáhají pochopit aplikaci vzorců vyložených v knize první. Předkládaný konvolut tedy vzájemně provazuje klasickou přednášku a cvičení s moderním proseminářem.

V knihách jsou kromě toho zmíněny přirozené návaznosti na další obory teoretické fyziky, zejména kvantovou teorii, teorii relativity, teorii pole a statistickou fyziku. Mým cílem byla také přehledná struktura a srozumitelnost textů, bohatost ilustrací, adekvátnost rozsahu i formy výkladu a v neposlední řadě též přívětivá typografická podoba díla.

Jiří Podolský, Praha, 10. února 2023

KNIHA PRVNÍ

Teoretická mechanika v klasické formulaci

Předmluva a poděkování

Tento text by nemohl vzniknout bez Jiřího Langera (1939–2020), mého skvělého učitele a pak blízkého kolegy z Ústavu teoretické fyziky. Doc. RNDr. Jiří Langer, CSc., se výuce teoretické mechaniky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy věnoval šest desetiletí. Za tu dobu vychoval mnoho tisíc studentů.

Mezi nimi jsem se na podzim roku 1983 ocitl i já. Předmět *Teoretická mechanika* pro studenty 2. ročníku fyziky na Matfyzu mě doslova uhranul a 22. prosince jsem z něj úspěšně složil zkoušku (zápis v indexu mi doc. Langer provedl zeleným inkoustem, podobně jako v prvním ročníku prof. Kvasnica za *Proseminář matematické fyziky*). Nemohl jsem tehdy tušit, že se mi tento nádherný předmět stane celoživotním pedagogickým osudem. Jsem za to opravdu vděčný, a klíčovou roli v tom opět sehrál Jiří Langer. Když jsem v roce 1989 nastoupil na vědeckou aspiranturu na katedru matematické fyziky MFF UK (postupně se mohla zase vrátit k tradičnímu názvu Ústav teoretické fyziky), zvolil si mne jako jednoho z cvičících tohoto předmětu.

V roce 1990 jsem odjel studovat do USA a na University of New Mexico shodou okolností pomáhal jako Graduate Assistant výbornému pedagogovi prof. Charlesi Beckelovi s výukou kurzu *Analytical Mechanics*. Bylo velmi poučné a zajímavé na vlastní kůži zažít, jakým způsobem probíhá výuka teoretické mechaniky na amerických univerzitách a jaký je její obsah.

Po návratu do Prahy mne Jiří Langer podrobně vyzpovídal. Přemýšleli jsme potom, jak nejlépe zkombinovat tradiční středoevropský styl výuky s americkým, ve kterém se namísto cvičení jenom zadávají domací úkoly a namísto písemného a ústního zkoušení jen píší testy. Tak vznikl náš „hybridní“ bodový systém,[1] který se opírá o pozitivní motivaci studentů a vede k jejich průběžné práci. Dost se nám osvědčil.

Krátce poté v roce 1995 mne Jiří Langer přizval, abych s ním kurz *Teoretická mechanika* přednášel. Za tuto jeho velkorysou nabídku, která pro mne byla jako z říše snů, jsem mu dodnes velmi zavázán. Tak jsem se jako začínající odborný asistent dostal k přednášení mechaniky na MFF UK. Nejprve jsem ze semestrálního kurzu převzal osm přednášek věnovaných hmotným bodům (až po Hamiltonovu–Jacobiho teorii), o čtyři roky později jsem přibral i dvě přednášky o mechanice tuhého tělesa. Od roku 2000 tak na kolegu Langera zbylo každoroční přednášení mechaniky kontinua. Inu, podal mi prst a přišel o skoro celou ruku…

[1] Během semestru lze získat až 100 bodů (10 bodů za každý ze 4 domácích úkolů a 60 bodů za napsání testu obsahujícího 3 úlohy). Kdo získá alespoň 60 bodů, dostane zápočet. Kdo získá alespoň 80 bodů, nemusí psát písemnou část zkoušky. Odměnou za 95 a více bodů je čokoládový bonbón.

Tolik můj osobní příběh. Pro zachování historické paměti snad bude zajímavé uvést i vážené předchůdce, přednášející tohoto předmětu na Matematicko-fyzikální fakultě od jejího osamostatnění v roce 1952. Podle osobních vzpomínek Jiřího Langera a některých mých (možná neúplných) podkladů bylo personální obsazení výuky následující:

Miroslav Brdička	zhruba do roku 1960
Arnošt Hladík	60. léta
Jiří Langer	cvičení a od roku 1964 části přednášek
Jiří Blank, Luboš Valenta	několikrát v 70. letech
Jiří Langer	zhruba od roku 1980
Jiří Podolský	od roku 1995

Uvedená jména dokládají, že je už dlouhou tradicí, aby výuku teoretické mechaniky zajišťovali členové Ústavu (katedry) teoretické (matematické) fyziky.

Je to zavazující tradice. Umocněná tím, že vydáme-li se hlouběji do minulosti výuky mechaniky na Univerzitě v Praze, setkáme se s profesory Trkalem, Záviškou, Koláčkem, Kučerou a Strouhalem. A ještě před nimi také s Ernstem Machem, který zde během téměř třicetiletého působení jako profesor experimentální fyziky napsal a v roce 1883 vydal vlivnou učebnici mechaniky *Die Mechanik in ihrer Entwickelung: historisch-kritisch dargestellt.* Toto pedagogicky skvěle podané dílo prezentuje téma z historického pohledu a obsahuje kritiku newtonovského konceptu absolutního prostoru a pohybu. Tento tzv. Machův princip se stal později velkou inspirací pro Alberta Einsteina. Je pozoruhodným faktem, že také Einstein sám působil o tři desetiletí později na téže (německé) Karlo–Ferdinandově univerzitě v Praze. Jako profesor teoretické fyziky zde tři semestry v letech 1911–1912 vyučoval *Mechaniku hmotných bodů* a *Mechaniku kontinua*.

Klasická Newtonova mechanika, která v historickém i obsahovém slova smyslu stojí v základech celé fyziky, je tu s námi již více než tři staletí. Před dvěma stoletími byla zásluhou Lagrangeho, Hamiltona a dalších oděna do velmi elegantního matematického hávu analytické mechaniky. Takto formulovaná teoretická mechanika tvoří východisko výuky fyziky na každé univerzitě. Bez jejího pochopení nelze postoupit dále k teorii relativistické ani kvantové. Knih, učebnic a skript teoretické mechaniky je proto v knihovnách světa doslova nepřeberné množství, ve všech hlavních jazycích i v bezpočtu jazyků lokálních.

Uveďme seznam významných českých učebnic teoretické mechaniky vzniklých a užívaných na Karlově univerzitě v Praze. První vydal už v roce 1880 profesor matematické fyziky a teoretické astronomie Augustin Seydler, ve 20. století pak následovalo několik dalších:

Augustin Seydler	*Theoretická mechanika pro vysoké školy*	1880
Bohumil Kučera	*Základy mechaniky tuhých těles*	1921
Viktor Trkal	*Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*	1956
Miroslav Brdička	*Mechanika kontinua*	1959
Miroslav Brdička, Arnošt Hladík	*Teoretická mechanika*	1987

Je vidět, že pražské univerzitní učebnice teoretické mechaniky v minulosti vznikaly s odstupem zhruba 30–40 let, tedy vždy po jedné až dvou generacích fyziků.

Z této perspektivy se zdá, že s odstupem 35 let od poslední „kanonické knihy" Brdičky a Hladíka [1] možná nyní opět nadešel příhodný čas poskytnout studentům další učebnici, která by se pokusila reflektovat nedávné změny matematického formalismu (použití abstraktního a účinného jazyka diferenciální geometrie), reagovala na vývoj oboru (posun ke studiu složitých dynamických systémů), modernizovala styl výkladu (efektivní stručnost při zachování adekvátní rigoróznosti), zvolila vhodnou formu prezentace (použití více obrázků a názorných schémat) i sazby (formát a velikost písma, přívětivá grafická podoba stránek).

Krátce po roce 2000 jsme se již dočkali moderních textů tohoto typu, zejména aktualizovaných vydání Brdičkovy *Mechaniky kontinua* [2] se spoluautory Samkem a Sopkem, a také velmi pěkné učebnice *Mechanika ve fyzice* od kolegů Horského, Novotného a Štefaníka z brněnské Masarykovy univerzity [3]. Tyto knihy nyní doporučujeme studentům na MFF UK jako referenční. Za pozornost stojí také starší kniha Leechova [4], která je i přes velký rozsah témat napsána úsporně a elegantně. V anglicky studujícím světě jsou moderními učebnicemi teoretické mechaniky především úvodní Symonova *Mechanics* [5], obvykle následovaná rozsáhlou a pokročilejší Goldsteinovou monografií *Classical mechanics* [6].

Nicméně již koncem 90. let jsme s Jiřím Langerem pojali záměr vypracovat vlastní studijní texty ušité přímo na míru našeho kurzu *Teoretické mechaniky*. S použitím svých v TEXu vysázených podrobných příprav na přednášky jsem v roce 1999 sepsal studijní materiál z tuhého tělesa a kolega Langer koncipoval elegantní úvod do jím přednášené mechaniky kontinua a rovnice struny (přepracováním a rozšířením tohoto stručného Langerova textu nyní vznikla III. část předkládané učebnice). V roce 2000 jsme oba materiály dali volně k dispozici studentům. Během dvaceti let jsem pak postupně dopisoval další chybějící kapitoly (a průběžně opravoval a měnil ty již existující). Nejprve to byl Lagrangeův formalismus (2006), pak Hamiltonův (2016) a nakonec i dlouho odkládaná kapitola věnovaná Hamiltonovu variačnímu principu (2019). Nyní již tedy bylo možné učebnici dokončit a v ucelené formě předložit studentům. Snad bude k užitku.

Jiří Podolský, Praha, 21. srpna 2022

Část I.

MECHANIKA HMOTNÝCH BODŮ

Kapitola 1

Newtonovská mechanika

V této stručné úvodní kapitole připomeneme klíčové pojmy a vzorce klasické mechaniky. Naznačíme i její meze ve vztahu k moderní relativistické a kvantové fyzice.

1.1 Hlavní pojmy, předpoklady a omezení klasické mechaniky

Úkolem klasické newtonovské mechaniky je popsat pohyb objektů, které navzájem interagují skrze silová působení. Klasická mechanika při tom pracuje s následujícími základními pojmy, o nichž činí tyto apriorní předpoklady:

- **prostor:** *spojitý, 3-dimenzionální, eukleidovský, homogenní a izotropní*
- **čas:** *spojitý, 1-dimenzionální, absolutní, rovnoměrně plynoucí, jednosměrný*
- **objekty:** *jsou idealizovány soustavou rozlišitelných hmotných bodů (nebo spojitým kontinuem)*
- **stav:** *stav hmotného bodu určen jeho polohou a hybností*

Z pohledu fyziky 20. a 21. století víme, že většina těchto předpokladů ve skutečnosti neplatí, nicméně za běžných okolností jsou s velmi dobrou mírou přesnosti oprávněné. Například:

- podle obecné teorie relativity není prostoročas v přítomnosti gravitace plochý (ale ve sluneční soustavě je jeho zakřivení malé a odchylky od newtonovských předpovědí tudíž obvykle zanedbatelné)
- podle teorie relativity má každý pozorovatel svůj vlastní čas (ale pro malé rychlosti a daleko od hmotných těles časy různých pozorovatelů splývají)

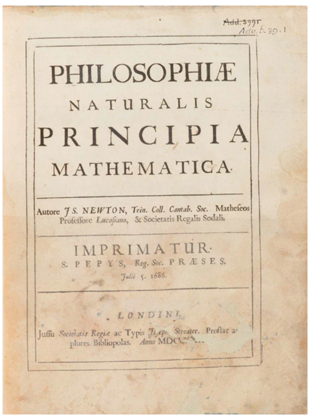
- v kvantové teorii jsou elektrony, fotony a další objekty mikrosvěta principiálně nerozlišitelné
  (avšak pro makroskopická tělesa platí standardní statistika a kauzalita)

- v kvantové mechanice je stav dán například jenom polohou částice, a v tom případě je její hybnost libovolná (anebo naopak jenom hybností částice, a v tom případě je její poloha libovolná). Lze určovat pouze pravděpodobnost, s jakou naměříme různé hodnoty fyzikálních veličin
  (nicméně makroskopická tělesa se za běžných teplot chovají klasicky a deterministicky, jejich pohyb je popsatelný spojitou trajektorií)

Můžeme tedy učinit praktický závěr, že předpoklady Newtonovy mechaniky sice v přírodě nejsou rigorózně splněny, ale platí s „velkou přesností" ve většině „obvyklých" situací – pokud mají studované objekty běžné rozměry, hmotnosti, teploty, malé rychlosti a podobně. Tehdy je možné (a pochopitelně i výhodné) aplikovat poměrně snadný aparát klasické newtonovské fyziky.

1.2 Newtonovy pohybové zákony

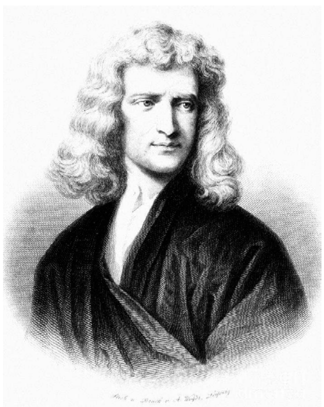
Isaac Newton (1643–1727) ve svém přelomovém díle *Philosophiæ naturalis principia mathematica* z roku 1687 (zkráceně *Principia*) položil základy matematicky pojaté přírodovědy. Zejména zformuloval následující zákony mechaniky:

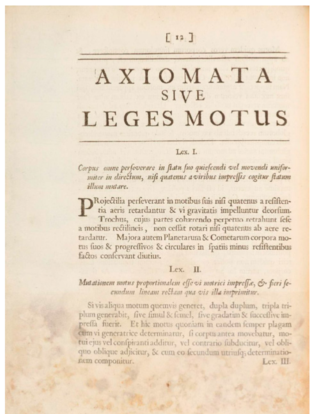

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi* Streater. Prostat a[illegible] plures Bibliopolas. *Anno* MDC[illegible]




[12]

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusq; determinationem componitur.

Lex. III.

Lex. I. *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

Lex. II. *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

Lex. III. *Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.*

V českém překladu tedy:

zákon 1. *Každé těleso setrvává ve stavu klidu anebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, ledaže je donuceno svůj stav změnit v důsledku sil na něj působících.*

zákon 2. *Změna hybnosti je úměrná působící síle a odehrává se ve stejném směru, ve kterém tato síla působí.*

zákon 3. *Proti každé akci vždy působí stejně velká reakce, neboli: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.*

V našem textu se však nebudeme doslova držet těchto Newtonových původních formulací, které v různých obměnách známe již ze střední školy, viz též [1, 3]. Zákony místo toho přeformulujeme do moderní podoby, která lépe vystihuje jejich fundamentální obsah a význam:

1. *Existuje vztažný systém* (nazýváme ho inerciální)*, vůči němuž se každý volný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře.*

Volný hmotný bod je takový, který je odstíněný od všech „pravých“ sil. Toto odstínění lze v principu provést pro každou interakci, vyjma gravitace (proto se musíme při konstrukci globálního inerciálního systému omezit na situace, kdy se studovaný objekt nachází daleko od velkých hmot). Připomeňme, že existuje celá třída inerciálních systémů navzájem spojených *konstantním otočením* nebo *konstantní translací* nebo ***Galileiho transformací*** $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t$, kde $\mathbf{x}$ je vektor polohy a $\mathbf{V}$ je vektor rychlosti čárkovaného inerciálního systému vůči nečárkovanému. Právě v inerciálních vztažných systémech je formulace druhého Newtonova pohybového zákona pro hmotné body jednoduchá:

2. *Pro každý hmotný bod existuje konstanta m a vektorová funkce $\mathbf{F}$ taková, že jeho pohyb vůči inerciálnímu systému je určen diferenciální rovnicí $m\,\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$.*

Druhý zákon je vlastně implicitní definicí setrvačné hmotnosti m hmotného bodu a současně i působící síly $\mathbf{F}$. Podstatné je, že tento zákon je *univerzální* v tom smyslu, že platí pro každý hmotný bod hmotnosti m a libovolnou klasickou sílu $\mathbf{F}$ (a jejich kombinace).

Mechanika se sama o sobě „nestará“ o původ $\mathbf{F}$. To je úkolem ostatních oborů fyziky, například

teorie gravitace, podle níž $\mathbf{F} = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,(-\mathbf{n})$
Newtonův gravitační zákon (1687),

teorie elektromagnetizmu: $\mathbf{F} = e\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
Maxwell (1864), Lorentzova síla (1892)

a tak dále.

Na charakter síly $\mathbf{F}$ většinou klademe přirozené požadavky, například:

- *platí princip akce a reakce*
  (problematické v případě nestacionárních polí)
- *závislost jen na okamžitém stavu*
  (problémy s retardací při konečné rychlosti šíření pole)
- *platí princip superpozice*
  (neplatí v silných gravitačních ani elmag polích)

V situacích, kdy jsou rozměry studovaného systému mnohem menší než je charakteristická vzdálenost daná součinem rychlosti šíření interakce a charakteristického času, lze tyto problémy ignorovat.

Závěrem zdůrazněme, že Newton svůj druhý pohybový zákon zformuloval velmi obecně,

$$\boxed{\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{p} = m\,\mathbf{v}}\,, \tag{1.1}$$

tedy že působící síla je rovna časové změně hybnosti tělesa, nikoli tedy jen součinu hmotnosti a zrychlení tělesa. Samozřejmě, v případě hmotného bodu či těles, které v průběhu děje nemění svou hmotnost m, platí $\dot{\mathbf{p}} = m\,\dot{\mathbf{v}} = m\,\ddot{\mathbf{x}}$. Avšak při zkoumání *pohybu tělesa s proměnnou hmotností* (například startu rakety) je obecně zapotřebí řešit Newtonovu rovnici (1.1). Jako první v historii fyziky takové úlohy formuloval a řešil v letech 1812–1815 v Čechách hrabě Jiří Buquoy [7, 8]. Jeho pozoruhodná práce však upadla v zapomnění a úlohy s proměnnou hmotností byly po mnoha desetiletích znovu nezávisle řešeny až dalšími fyziky [9].

Ještě zajímavější však je, že po formální stránce platí pohybová rovnice ve tvaru (1.1) dokonce i v Einsteinově *speciální teorii relativity*. V takovém případě však mají symboly poněkud jinou fyzikální interpretaci: $\mathbf{p}, \mathbf{F}$ a $\mathbf{v}$ již nejsou vektory v třírozměrném eukleidovském prostoru ale čtyř-vektory v Minkowského prostoročase, časová derivace se vztahuje k vlastnímu času τ pohybujícího se objektu a m je jeho klidová hmotnost.

1.3 Od Newtona k analytické mechanice

V tomto studijním textu se budeme postupně seznamovat s několika různými formulacemi klasické mechaniky. Již od základní školy známe její běžnou „Newtonovu“ podobu, která jako hlavní veličiny využívá ***vektory***, především vektor polohy $\mathbf{x}$, vektor rychlosti $\mathbf{v}$, vektor zrychlení $\mathbf{a}$, vektor síly $\mathbf{F}$ atd. Manipulace s vektorovými veličinami je však u složitějších úloh dosti obtížná (zejména vstoupí-li do hry též jejich vektorový součin).

Proto se v průběhu 18. a 19. století vynořila řada alternativních formulací klasické mechaniky, u jejichž zrodu stáli Leibniz, Bernoulli, Maupertuis, Euler, Lagrange, Laplace, Legendre, Poisson, Jacobi, Hamilton a mnozí další. Společným rysem těchto formulací je, že fundamentálními veličinami jsou specifické ***skaláry***.

Příkladem takových fundamentálních skalárů jsou zejména vhodné kombinace kinetické a potenciální energie studovaného systému, jež dávají Lagrangeovu funkci L či Hamiltonovu funkci H, anebo akční funkcionál S. Ukazuje se, že stačí správným způsobem operovat pouze s nimi. Například pohybové rovnice (a jejich integrály, tedy zachovávající se veličiny) získáme pouhým derivováním zmíněných skalárů podle vhodných proměnných, variováním funkcionálů a podobně.

Hlavními vzorci tohoto typu jsou ***Lagrangeovy rovnice*** (3.24),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0\,,$$

Hamiltonovy kanonické rovnice (5.8),

$$\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q^j}\,,$$

anebo ***Hamiltonův variační princip*** (4.8),

$$\delta S = 0\,.$$

Tyto modernější přístupy ke klasické mechanice se často označují jako *analytická mechanika*. Význam nových alternativních formulací mechaniky je četný, především:

- **otevírají cestu k popisu celé řady nemechanických jevů:**
  lze je zobecnit v teorii pole, v relativistických teoriích, v kvantových teoriích
- **jsou mohutnějším nástrojem výpočtů:**
  jsou užitečné prakticky pro řešení složitých úloh (exaktně, perturbačně nebo numericky)
- **využívají metod pokročilé matematiky:**
  rozšiřují spektrum matematických znalostí (parciální diferenciální rovnice, variační počet)
- **jsou krásné a elegantní:**
  patří do pokladnice lidského ducha a jejich poznáním se otevírá zcela nový pohled na svět

Vydejme se tedy nyní na společnou cestu k novým obzorům.

Kapitola 2

Newtonovy rovnice s vazbami

Náš první krok směrem k analytické mechanice bude sice malý, ale důležitý. Začneme rozborem problému, jak řešit pohybové rovnice s dodatečnými vazbami. Stále ještě zůstaneme v původní „vektorové“ formulaci Newtonovy mechaniky a v kartézských souřadnicích. Zavedeme ale užitečný formalismus, který nám umožní řešit situace, kdy pohyb objektů již není volný, ale kromě působících „externích“ sil je navíc určitým předepsaným způsobem omezen. Například tím, že se těleso smí pohybovat jen po určité zakřivené ploše, že se musí kutálet bez prokluzování a podobně.

2.1 Vazby a jejich klasifikace

Newtonův pohybový zákon (1.1) určuje, jak se soustava hmotných bodů pohybuje pod vlivem působících sil, například gravitační či Lorentzovy, viz část 1.2. Tyto síly, které jsou explicitně zadány jako hladké funkce *polohy*, *rychlosti* a případně *času*, se tradičně označují jako takzvané ***vtištěné síly*** a označují se symbolem $\mathbf{F}$. V tom případě jsou pohybové rovnice z matematického hlediska soustavou obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu. Soustava má obecně řešení, které je jednoznačně určeno počátečními podmínkami, tedy hodnotami poloh a rychlostí (resp. hybností) na počátku děje.

Pohybový zákon však můžeme užít i obráceně: je-li pohyb soustavy znám, tj. jsou-li souřadnice poloh dány jako konkrétní funkce času, můžeme dvojím zderivováním a dosazením do (1.1) určit síly, které na soustavu v průběhu děje působily. Takovou úlohu řešil už Newton v samých počátcích mechaniky, když z pohybu planet – z Keplerových zákonů – určil tvar gravitačního zákona.[1]

Často se ale v mechanice setkáváme s úlohami, které jsou „tak něco mezi“ oběma těmito krajními situacemi. Pohyb objektů, na něž působí vtištěné síly $\mathbf{F}$, není zpočátku plně znám, ale je omezen tím, že jsou na něj položeny jisté *apriorní podmínky*

[1] Je pozoruhodné, že toto odvození provedl pomocí čistě geometrických úvah. Podrobnosti viz například [10].

– například že některé z hmotných bodů soustavy „kloužou“ po zadaných plochách, body mohou být spojeny tuhými (nehmotnými) tyčemi a podobně. O těchto dodatečných podmínkách obecně hovoříme jako o ***vazbách***. Jejich účinek na hmotné body můžeme nahradit pomocnými silami, které přirozeně nazýváme ***vazbové síly*** a označujeme je $\mathbf{R}$. Vazbové síly však nejsou zpočátku *explicitně* zadány a musejí být odvozeny během hledání konzistentního řešení pohybových rovnic.

Vazby obecně mohou omezovat polohy i rychlosti bodů soustavy a mohou záviset na čase. Nejjednodušší a z hlediska fyzikálních aplikací i nejdůležitější typ vazeb lze zapsat jako implicitní rovnici nějaké *pevné hladké plochy v prostoru* s kartézskými souřadnicemi $(x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z)$:

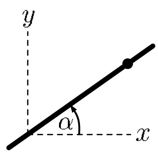
$$\phi(x^1, x^2, x^3) = 0\,. \tag{2.1}$$

Z věty o implicitní funkci více proměnných plyne, že například lze (alespoň lokálně) vyjádřit souřadnici x^3 jakožto funkci zbylých dvou souřadnic (x^1, x^2). Předepsáním vazby (2.1) tedy omezujeme pohyb hmotného bodu v třírozměrném prostoru jen na hladký dvourozměrný *podprostor* přípustných poloh, takzvaný ***konfigurační prostor***. Jeho dimenze je určena ***počtem stupňů volnosti*** soustavy, což je počet *nezávislých* souřadnic. Každá vazba (2.1) snižuje počet stupňů volnosti o jeden: původní tři stupně volnosti se vazbou efektivně zredukovaly na pouhé dva. Předepsáním další vazby by soustava měla už jen jeden stupeň volnosti (typicky by pak byl pohyb hmotného bodu omezen na křivku určenou průsečíkem příslušných hladkých ploch).

Příklady jednoduchých vazeb:

- *nakloněná přímka:*

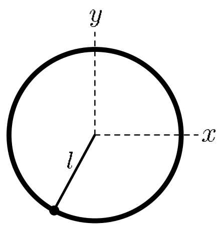
$$\phi \equiv y - x\,\tan\alpha = 0\,. \tag{2.2}$$



Bod o souřadnicích (x, y) se může pohybovat jen po přímce se sklonem α, neboť $\tan\alpha = y/x$ (předpokládáme $z = 0$; pro z libovolné jde o nakloněnou rovinu).

- *matematické kyvadlo:*

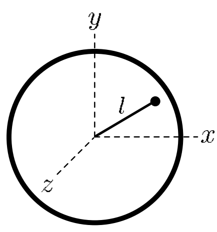
$$\phi \equiv x^2 + y^2 - l^2 = 0\,. \tag{2.3}$$



Bod o souřadnicích (x, y) se může pohybovat jen po kružnici, jejíž střed je v počátku a poloměr má l (předpokládáme $z = 0$).

- *sférické kyvadlo (pohyb po povrchu koule):*

$$\phi \equiv x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0\,. \tag{2.4}$$



Bod o souřadnicích (x, y, z) se může pohybovat jen po sféře, jejíž střed je v počátku a poloměr má l.

- *pohyb po povrchu koule s proměnným poloměrem:*

$$\phi \equiv x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0\,. \qquad (2.5)$$

Bod o souřadnicích (x, y, z) se může pohybovat jen po sféře, její poloměr se mění jako *zadaná* funkce času $l(t)$.

Obecně mohou vazby záviset také na rychlosti hmotných bodů, případně mohou omezovat jejich pohyb nejen na zakřivené plochy, ale na celý poloprostor, jehož je zakřivená plocha hranicí. Pro přehlednost proto nyní provedeme klasifikaci vazeb a zavedeme terminologii běžnou v literatuře.

Klasifikace vazeb podle tří různých kritérií:

$$\text{vazba} \left\{ \begin{array}{lll} \textbf{\textit{oboustranná}}: & \phi = 0 & \text{omezení na podprostor}\,, \\ \textbf{\textit{jednostranná}}: & \phi \geq 0 & \text{omezení na „polo“prostor}\,. \end{array} \right. \qquad (2.6)$$

$$\text{vazba} \left\{ \begin{array}{lll} \textbf{\textit{skleronomní}}: & \phi(x^j) & \text{nezávislá na čase}\,, \\ \textbf{\textit{rheonomní}}: & \phi(x^j, t) & \text{závislá na čase}\,. \end{array} \right. \qquad (2.7)$$

$$\text{vazba} \left\{ \begin{array}{lll} \textbf{\textit{holonomní}}: & \phi(x^j, t) & \text{nezávislá na rychlosti}\,, \\ \textbf{\textit{neholonomní}}: & \phi(x^j, \dot{x}^j, t) & \text{závislá na rychlosti}\,. \end{array} \right. \qquad (2.8)$$

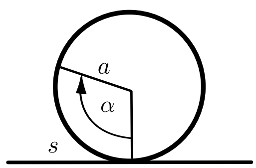
Vazba (2.1) je tedy oboustranná, skleronomní a holonomní. Také všechny čtyři vazby (2.2)–(2.5) jsou oboustranné a holonomní, přičemž první tři jsou skleronomní, zatímco poslední je rheonomní.

Použité termíny jsou z řečtiny: *ho nomos* (ὁ νόμος) = zákon, *skléros* (σκληρός) = pevný, tvrdý, *rheó* (ῥέω) = teču, plynu, *holos* (ὅλος) = celý.[2]

K neholonomním vazbám je však nezbytné učinit ještě velmi důležitou poznámku: *ne každá vazba obsahující rychlost je neholonomí.* Neholonomní je *pouze taková*, ve které se závislosti na rychlosti ***nelze zbavit integrací.***

Příklad zdánlivě neholonomní vazby:

disk pohybující se bez prokluzování po vodorovné ***přímce***



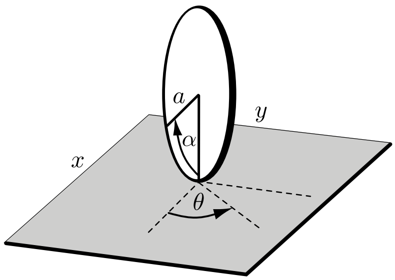
Úloha má jen jeden stupeň volnosti.

Vazba na neprokluzování zní $\dot{s} = a\,\dot{\alpha}$, což ale lze integrovat do podoby *holonomní vazby* $\phi \equiv s - a\,\alpha = 0\,.$

[2]Nemáme-li *sklerózu* a nejsme tedy *natvrdlí*, vzpomeneme si, že *rheologie* studuje *deformační* vlastnosti látek (anebo na Herakleitovo *panta rhei*, vše plyne).

Příklad skutečně neholonomní vazby:

disk pohybující se bez prokluzování po vodorovné ***rovině***



Úloha má čtyři stupně volnosti (je-li disk stále svislý), a to (x, y) bod dotyku, α úhel odvalení, θ úhel natočení disku.

Vazby na neprokluzování jsou $\dot{x} = a\,\dot{\alpha}\cos\theta$ a $\dot{y} = a\,\dot{\alpha}\sin\theta$, což jsou dvě vazby tvaru $\phi(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\alpha}, \theta) = 0$, které však *nelze integrovat* do holonomních vazeb $\phi(x, y, \alpha, \theta) = 0$.

Důkaz tohoto tvrzení je zřejmý: *vždy* je možné dostat se z počátečního stavu $x = 0 = y$, $\alpha = 0$ valením bez prokluzování do místa (x, y) s předepsaným úhlem odvalení α a s libovolným úhlem natočení disku θ. Stačí totiž zvolit vhodnou trajektorii, která končí v bodě (x, y), má délku $s = a\,\alpha$ a tečna k trajektorii v koncovém bodě má směr θ. Je-li zadáno příliš malé (nebo dokonce záporné) koncové α, stačí na vhodném místě provést „otočku disku do protisměru“ $(\theta \mapsto \theta + \pi)$, díky čemuž se pak začne úhel odvalení zmenšovat na požadovanou hodnotu. Všechny čtyři parametry jsou tedy zcela *nezávislé*, takže pro ně *nemůže* existovat vazba tvaru $\phi(x, y, \alpha, \theta) = 0$.

2.2 Lagrangeovy rovnice I. druhu

Vraťme se nyní k řešení úlohy, jak najít pohyb objektu podrobeného vazbě. V případě, že hmotnost objektu m je konstantní (například jde o hmotný bod), lze Newtonovu pohybovou rovnici (1.1) psát v obvyklém tvaru $m\,\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$, tedy v kartézských souřadnicích

$$m\,\ddot{x}_i = F_i(x^j, \dot{x}^j, t)\,, \qquad i, j = 1, 2, 3\,, \tag{2.9}$$

přičemž $\ddot{x}_i = \ddot{x}^i$ jsou kartézské složky zrychlení.[3] To je obecně soustava tří obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu pro hledanou trajektorii $x^i(t)$. Pokud jsou funkce $F_i(x^j, \dot{x}^j, t)$ vyjadřující kartézské složky působící ***vtištěné síly*** $\mathbf{F}$ hladké funkce polohy a případně rychlosti a času, rovnice mají *jednoznačné řešení* určené *počátečními podmínkami*, tedy polohou x^i_0 a rychlostí $\dot{x}^i_0$.

Nyní na soustavu pohybových rovnic naložíme holonomní (oboustrannou) vazbu

$$\phi(x^j, t) = 0\,, \tag{2.10}$$

což je v každém okamžiku t implicitní rovnice (hladké) pevné plochy v třírozměrném eukleidovském prostoru. Řešení rovnic (2.9) už nebude podmínkám (2.10) vyhovo-

[3]Obecně je mezi *vektory* (veličinami s kontravariantními složkami, tedy s horními indexy) a *1-formami* (veličinami s kovariantními složkami, tedy s dolními indexy) geometrický rozdíl. Protože však zde pracujeme v eukleidovském prostoru v bázi *kartézských* souřadnic, jsou *hodnoty* odpovídajících si kovariantních a kontravariantních složek totožné, tedy $x_i = x^i$ a $F_i = F^i$.

vat.[4] Zkoumejme tedy, jak musíme pohybové rovnice (2.9) pozměnit, aby jejich řešení vazbu (2.10) v každém čase splňovalo.

Přidejme na pravou stranu pohybové rovnice (2.9) vhodné funkce $R_i(x^j, \dot{x}^j, t)$, které můžeme interpretovat jako kartézské složky dodatečné ***vazbové síly*** $\mathbf{R}$, zapříčeněné interakcí s vazbou. V každém okamžiku a v každém místě vazby $\phi = 0$ můžeme tuto sílu jednoznačně rozložit na sílu $\mathbf{T}$ ***tečnou*** k vazbové ploše (2.10) a sílu $\mathbf{N}$ k této ploše ***kolmou*** (normálovou), tedy $\mathbf{R} = \mathbf{T} + \mathbf{N}$. Normálovou komponentu $\mathbf{N}$ vazbové síly můžeme bez újmy na obecnosti psát ve složkách jako

$$N_i = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\,, \tag{2.11}$$

kde koeficient λ je zatím neurčená funkce souřadnic, rychlostí a času, zatímco $\operatorname{grad}\phi$ se složkami $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$ je (obecně nejednotkový) vektor kolmý k ploše určené (2.10).[5] Rovnice (2.9) spolu s vazbou (2.10) tím přejde na tvar

$$\boxed{m\,\ddot{x}_i = F_i + T_i + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\,, \qquad \phi(x^j, t) = 0}\,, \tag{2.12}$$

kde T_i a λ jsou zatím neznámé funkce. Tuto soustavu rovnic, jež určuje pohyb hmotného bodu podrobeného holonomní vazbě, nazýváme ***Lagrangeovy rovnice I. druhu*** (J. L. Lagrange, 1775). Objasněme nyní fyzikální význam zavedených funkcí λ a T_i.

Z výrazu (2.11) je vidět, že Lagrangeův koeficient λ určuje *velikost normálové komponenty vazbové síly* $\mathbf{N} = \lambda \operatorname{grad}\phi$, tedy $N \equiv |\mathbf{N}| = |\lambda||\operatorname{grad}\phi|$, kde $|\operatorname{grad}\phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)^2}$.

Naproti tomu T_i jsou kartézské složky silové interakce $\mathbf{T}$ mezi vazbou a tělesem, které jsou k holonomní vazbě *tečné*. Reprezentují například *třecí sílu* mezi tělesem a povrchem popsaným vazbou $\phi(x^j, t) = 0$. Pokud je tento povrch dokonale hladký, tření vymizí a můžeme položit $T_i = 0$.

Ukažme nyní, že pro *holonomní a současně skleronomní* vazbu $\phi(x^j) = 0$ je možné vždy explicitně *vyjádřit* λ jako funkci okamžité polohy a okamžité rychlosti hmotného bodu, tedy $\lambda(x^j, \dot{x}^j, t)$. Hledané řešení je dáno jako $x^i = x^i(t)$. Dosadíme-li ho do vazbové podmínky, dostaneme složenou funkci $\phi\big(x^i(t)\big)$ času t, jejíž hodnota *musí* být v každém čase také rovna nule. Dvojím derivováním $\phi\big(x^i(t)\big)$ podle času získáme tedy rovnice

$$\sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\,\dot{x}^i = 0\,, \qquad \sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\,\ddot{x}^i + \sum_{i,k} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i \partial x^k}\,\dot{x}^i\dot{x}^k = 0\,, \qquad i,k = 1,2,3\,. \tag{2.13}$$

[4] Uvažme např. pohyb hmotného bodu po povrchu koule bez působení vtištěné síly ($F_i = 0$). V takovém případě rovnice (2.9) určují, že pohyb je přímočarý, ale na sférické ploše popsané vazbou (2.10) žádné přímky neexistují.

[5] Uvažme dva blízké body o souřadnicích x^i resp. $x^i + \mathrm{d}x^i$ na vazbové ploše. Zjevně platí $\phi(x^i) = 0$ a $\phi(x^i + \mathrm{d}x^i) = 0$. Rozvineme-li druhou funkci do Taylorovy řady, dostaneme $\phi(x^i + \mathrm{d}x^i) - \phi(x^i) = \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = 0$. Protože vektor se složkami $\mathrm{d}x^i$ leží v *tečné* rovině k ploše $\phi = 0$, musí být vektor $\operatorname{grad}\phi$ se složkami $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$ k této ploše *kolmý*, protože jejich skalární součin je nulový.

Nyní vynásobíme druhou rovnici (2.13) konstantou m a dosadíme za $m\,\ddot{x}_i$ z Lagrangeovy rovnice (2.12). Protože tečné složky vazbové síly T_i a gradientu $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ jsou navzájem kolmé, dostaneme výraz

$$\sum_i \Big(F_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \Big) = -m \sum_{i,k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^k}\, \dot{x}^i \dot{x}^k, \qquad (2.14)$$

takže

$$\lambda(x^j, \dot{x}^j, t) = -\Big(m \sum_{i,k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^k}\, \dot{x}^i \dot{x}^k + \sum_i F_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \Big) \Big/ \sum_i \Big(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \Big)^2. \qquad (2.15)$$

Protože první a druhé derivace vazby ϕ jsou známé funkce, je funkce λ zcela určena normálovou složkou vtištěné síly F_i, složkami rychlosti $\dot{x}^i$ hmotného bodu a jeho polohou v daném okamžiku. Dosadíme-li nyní λ z (2.15) do (2.12), dostaneme soustavu diferenciálních rovnic vyřešených k nejvyšším (to jest druhým) derivacím, v nichž na pravé straně stojí plně určené funkce souřadnic, rychlostí a času. Jejich řešitelnost pro „slušné“ funkce na pravé straně (přesněji: funkce splňující Lipschitzovu podmínku) zaručuje věta o existenci a jednoznačnosti. Najdeme-li jejich řešení a dosadíme teď už známé funkce $x^i = x^i(t)$ do (2.15), zcela určíme pomocí (2.11) normálovou sílu N_i způsobenou vazbou. Naopak funkce T_i vazbou určeny nejsou.

Fyzikálně představují holonomní vazby (2.10) omezení pohybu na povrch nějaké tělesa. Obvykle navíc předpokládáme, že toto těleso je *dokonale hladké*: tření zcela vymizí a v takovém případě klademe $T_i = 0$. Lagrangeovy rovnice (2.12) pak můžeme přepsat ve vektorovém tvaru

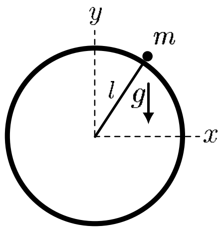
$$\boxed{m\,\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \lambda\, \mathrm{grad}\, \phi\,, \qquad \phi(\mathbf{x}, t) = 0}\,. \qquad (2.16)$$

Při pohybu po povrchu *reálného tělesa* ale vždy působí tření, které má směr tečný k povrchu. Pokud chceme toto tření uvažovat, je možné ho zahrnout mezi vtištěné síly a určit je nějakým předpisem, který obecně závisí na tvaru vazbové plochy. Vezměme nejjednodušší příklad takzvaného *izotropního smykového tření*. Odpovídající síla $\mathbf{T}$ je úměrná kolmému tlaku na podložku a má směr opačný než rychlost, tedy má tvar ($-$koeficient vlečného tření k)$\times$(velikost normálové složky vazbové síly $N = |\lambda||\mathrm{grad}\,\phi|$)$\times$(jednotkový vektor ve směru rychlosti). Bude proto vystižena předpisem

$$\mathbf{T} = -k\, N \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\,, \qquad \text{tedy} \qquad T_i = T^i = -k\, |\lambda| \sqrt{\textstyle\sum_k \Big(\frac{\partial \phi}{\partial x^k} \Big)^2}\, \frac{\dot{x}^i}{\sqrt{\sum_j (\dot{x}^j)^2}}\,. \qquad (2.17)$$

Není-li pohyb jednorozměrný, tak díky odmocninám zpravidla nelze tyto rovnice analyticky řešit. Úloha je však dobře definovaná a řešení můžeme najít numericky.

Příklad: *Hmotný bod klouže v homogenním gravitačním poli po hladké kouli poloměru l. Byl vypuštěn z klidu z vrcholu.*[6] *Ve které výšce bod opustí povrch koule?*



Ze symetrie úlohy je zjevné, že pohyb se bude odehrávat ve svislé rovině. Můžeme proto položit $z = 0$ a řešit problém jen ve dvourozměrném řezu se souřadnicemi x, y. Lagrangeovy rovnice I. druhu (2.16) tedy mají tvar

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= \qquad\quad \lambda\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\,, \\ m\,\ddot{y} &= -mg + \lambda\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\,, \\ \phi &\equiv x^2 + y^2 - l^2 = 0\,, \end{aligned} \tag{2.18}$$

kde vazba $\phi = 0$ je stejná jako vazba (2.3) pro matematické kyvadlo. Jednostrannou vazbu ze zadání jsme zde pro zjednodušení výpočtů nahradili analogickou vazbou oboustrannou: uvažujeme pohyb v „kulové slupce" poloměru l a hledaný bod najdeme podmínkou $R = 0$.
Spočítáním parciálních derivací funkce ϕ dostaneme z prvních dvou rovnic

$$m\,\ddot{x} = \qquad\quad 2\lambda\,x\,, \tag{2.19}$$

$$m\,\ddot{y} = -mg + 2\lambda\,y\,. \tag{2.20}$$

Nyní vezmeme vazbu (2.18) vyčíslenou podél trajektorie a provedeme její 1. a 2. úplnou časovou derivaci:

$$\dot{\phi} = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 0\,, \qquad \ddot{\phi} = 2[(x\ddot{x} + y\ddot{y}) + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)] = 0\,.$$

Uvážíme, že $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$ je kvadrát rychlosti hmotného bodu, a dosadíme za $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ z (2.19), (2.20). Po úpravě užitím $x^2 + y^2 = l^2$ dostaneme

$$\lambda = \frac{m}{2l^2}(\,gy - v^2)\,, \tag{2.21}$$

což je realizace obecného výrazu (2.15) (přesvědčte se o tom!). Úlohu dopočítáme užitím zákona zachování mechanické energie

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = mgl\,,$$

z něhož vyjádříme rychlost $v^2 = 2g(l - y)$ a dosadíme do (2.21), takže

$$\lambda = \frac{mg}{2l^2}(\,3y - 2l)\,.$$

[6] Vrchol je (nestabilní) rovnovážná poloha, takže bod je nutno vypustit z blízkého okolí vrcholu.

Hmotný bod opustí povrch koule v okamžiku, kdy vazbová síla vymizí, tedy $R = N = |\lambda||\mathrm{grad}\,\phi| = 2l\,|\lambda| = 0$ neboli $\lambda = 0$, což dává hledanou podmínku

$$y_\mathrm{o} = \tfrac{2}{3}\,l\,. \tag{2.22}$$

Během řešení úlohy jsme použili ***zákon zachování energie***. Jsou-li vazby *holonomní a současně skleronomní*, jako v tomto případě, je tento zákon *důsledkem pohybových rovnic* (nikoli dodatečným principem). Opravdu, sečteme-li první rovnici v (2.18) přenásobenou $\dot{x}$ s druhou rovnicí v (2.18) přenásobenou $\dot{y}$, dostaneme $m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y}) = -mg\dot{y} + \lambda(\frac{\partial\phi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\dot{y})$, což můžeme přepsat do tvaru $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\cdot} = -(mgy)^{\cdot} + \lambda\dot{\phi}$. Protože $\dot{\phi} = 0$, lze tuto rovnici snadno integrovat: dostaneme

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \text{konst.}\,, \tag{2.23}$$

tedy zákon zachování mechanické energie.

2.2.1 Více hmotných bodů a více vazeb

Zobecněme nyní formalismus Lagrangeových rovnic I. druhu na soustavu N ***hmotných bodů*** a obecný počet v ***vazeb***. Poloha hmotných bodů v třírozměrném eukleidovském prostoru je přirozeně určena jejich ***kartézskými souřadnicemi*** x^i, tedy N trojicemi čísel. V analytické mechanice je výhodné formálně reprezentovat polohy *všech* těchto N bodů ***jediným bodem v*** $3N$***-rozměrném*** eukleidovském prostoru, jehož souřadnice jsou dány průběžně očíslovanými kartézskými souřadnicemi jednotlivých hmotných bodů. Jinými slovy, souřadnice (x^1, x^2, x^3) tohoto fiktivního bodu tvoří souřadnice prvního hmotného bodu, (x^4, x^5, x^6) jsou souřadnice druhého hmotného bodu atd., až $(x^{3N-2}, x^{3N-1}, x^{3N})$ jsou souřadnice bodu N-tého. Časový vývoj soustavy N hmotných bodů je pak dán *trajektorií* $x^i(t)$ jediného fiktivního bodu v tomto formálním $3N$-rozměrném kartézském prostoru se souřadnicemi x^i, kde $i = 1, 2, \ldots, 3N$.

Rozšíření našeho postupu, jenž vedl k předchozím vztahům (2.12), na obecný problém pohybu N hmotných bodů podrobených $v < 3N$ holonomním vazbám $\phi_\nu = 0$ bez tření ($T_i = 0$) je vcelku přímočaré: vývoj je nyní popsán soustavou $3N$ Lagrangeových diferenciálních rovnic

$$\boxed{m_i\ddot{x}_i = F_i + \sum_{\nu=1}^{v} \lambda_\nu \frac{\partial\phi_\nu}{\partial x^i}}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, 3N\,, \tag{2.24}$$

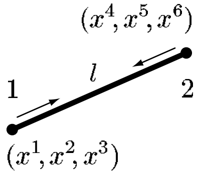
a v vazbových podmínek

$$\boxed{\phi_\nu(x^1, x^2, \ldots, x^{3N}, t) = 0}\,, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, v\,. \tag{2.25}$$

Celkem tedy máme $3N + v$ rovnic pro $3N + v$ neznámých funkcí $x^i(t)$ a $\lambda_\nu(t)$. Zdůrazněme, že na levé straně rovnic (2.24) přes index i *nesčítáme*, tedy nepoužíváme Einsteinovu sumační konvenci.

Používáme zde také pravidlo, že hmotnost *prvního* bodu je $m_1 = m_2 = m_3$, hmotnost *druhého* bodu je $m_4 = m_5 = m_6$, a tak dále.

Příklad: Příkladem vazby (2.25) může být skleronomní vazba



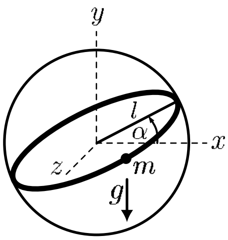
$$\phi \equiv (x^1 - x^4)^2 + (x^2 - x^5)^2 + (x^3 - x^6)^2 - l^2 = 0\,,$$

která říká, že vzdálenost mezi prvním hmotným bodem o souřadnicích (x^1, x^2, x^3) a druhým hmotným bodem, který má souřadnice (x^4, x^5, x^6), zůstává konstantní a rovna l. Všimněte si, že příslušný vektor vazbové síly $\mathbf{R} = \mathbf{N}$ má 6 složek $\lambda\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$:

$$2\lambda\big[x^1 - x^4, x^2 - x^5, x^3 - x^6, -(x^1 - x^4), -(x^2 - x^5), -(x^3 - x^6)\big]\,.$$

První tři složky určují vektor síly (akci), kterou působí druhý bod na první, zatímco zbylé tři složky naopak určují vektor síly (reakci), kterou působí první bod na druhý. Obě tyto síly evidentně působí podél spojnice obou bodů a jsou opačně orientované.

Příklad: *Hmotný bod klouže v homogenním gravitačním poli po průsečíku hladké koule poloměru l s nakloněnou rovinou sklonu α. Nalezněte obě vazbové síly.*



Máme jeden hmotný bod hmotnosti m, který je podrobený dvěma vazbám. První je identická s vazbou (2.4), zatímco druhá je identická s vazbou (2.2):

$$\phi_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0\,, \qquad (2.26)$$

$$\phi_2 \equiv y - x\,\tan\alpha = 0\,. \qquad (2.27)$$

Lagrangeovy rovnice I. druhu (2.24) proto mají tvar

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= \phantom{-mg+{}} 2\lambda_1\,x - \lambda_2\tan\alpha\,,\\ m\,\ddot{y} &= -mg + 2\lambda_1\,y + \lambda_2\,,\\ m\,\ddot{z} &= \phantom{-mg+{}} 2\lambda_1\,z\,. \end{aligned} \qquad (2.28)$$

Nejprve tyto rovnice dosadíme do druhé časové derivace druhé vazby $\ddot{\phi}_2 = \ddot{y} - \ddot{x}\,\tan\alpha = 0$. Člen s λ_1 vypadne díky (2.27), takže

$$\lambda_2 = mg\,\cos^2\alpha\,.$$

Nyní naopak dosadíme z (2.28) do druhé časové derivace první vazby $\ddot{\phi}_1 = 2[(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}) + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)] = 0$ a užijeme obě vazby (2.26), (2.27). Po úpravě dostaneme

$$\lambda_1 = \frac{m}{2l^2}(\,gy - v^2)\,,$$

kde $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ je kvadrát rychlosti hmotného bodu. Všimněme si, že tento výraz je shodný s (2.21), jen rychlost nyní má i z-ovou složku.