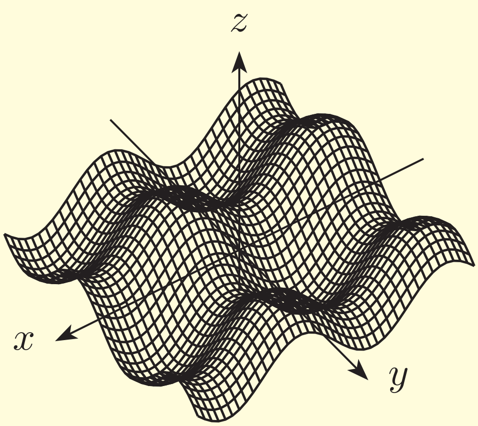
Zuzana Došlá, Petr Liška

Matematika

pro nematematické obory



s aplikacemi v přírodních a technických vědách

GRADA®

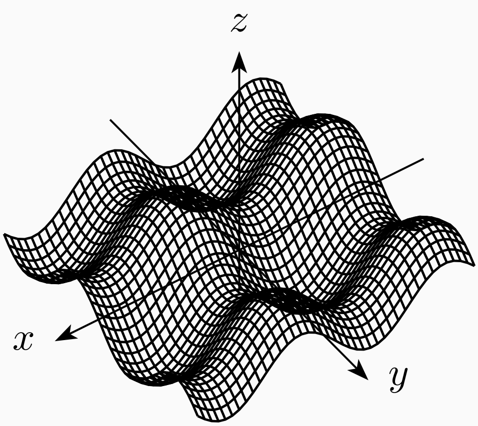
EXPERT

GRADA®

Zuzana Došlá, Petr Liška

Matematika

pro nematematické obory



s aplikacemi v přírodních a technických vědách

Grada Publishing

prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.
Mgr. Petr Liška

Matematika pro nematematické obory
s aplikacemi v přírodních a technických vědách

TIRÁŽ TIŠTĚNÉ PUBLIKACE:
Kniha je monografie

Vydala Grada Publishing, a.s.
U Průhonu 22, 170 00 Praha 7
tel.: +420 234 264 401, fax: +420 234 264 400
www.grada.cz
jako svou 5655. publikaci

Odborná recenze:
doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Vydání odborné knihy schválila Vědecká redakce nakladatelství Grada Publishing, a.s.

Odpovědný redaktor Petr Somogyi
Grafická úprava a sazba Mgr. Petr Liška
Počet stran 304
První vydání, Praha 2014
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a.s.

ISBN 978-80-247-5322-5

ELEKTRONICKÉ PUBLIKACE:

ISBN 978-80-247-9206-4 (ve formátu PDF)

Obsah

O autorech

prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.

Vystudovala obor Matematika na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně (dříve Univerzita J. E. Purkyně), kde také od roku 1981 působí jako vysokoškolský pedagog. Od roku 2005 je profesorkou matematiky v oboru Matematika – Matematická analýza. Ve své vědecko-výzkumné činnosti se zaměřuje na studium kvalitativních vlastností obyčejných diferenciálních a diferenčních rovnic. Je autorkou více než stovky odborných vědeckých prací, jedné zahraniční monografie, několika skript a multimediálních textů. Navázala bohatou mezinárodní spolupráci, zejména s italskými matematiky, a své výsledky publikuje v mezinárodních vědeckých časopisech. Jako pedagog se zaměřuje na výuku matematické analýzy pro učitelské studium a výuku matematiky pro nematematické obory. Dlouhodobě se podílí na popularizaci matematiky a přírodních věd. Je školitelkou doktorandů a členkou redakčních rad několika mezinárodních časopisů.

Mgr. Petr Liška

Je absolventem oboru Učitelství matematiky a deskriptivní geometrie pro střední školy na Masarykově univerzitě v Brně, kde v současnosti pokračuje v doktorském studiu Matematické analýzy a věnuje se kvalitativním vlastnostem obyčejných diferenciálních rovnic se zpožděním. Vyučuje matematiku pro chemiky a základy matematiky. Od roku 2010 působí jako asistent na Ústavu matematiky Lesnické a dřevařské fakulty Mendelovy univerzity v Brně, kde vyučuje základní kurzy matematiky a konstruktivní geometrie.

Předmluva

Žádné lidské zkoumání nemůže být nazváno opravdovou vědou, pokud ho nemůžeme dokázat matematicky.
Leonardo da Vinci

Tato učebnice obsahuje základy matematiky v rozsahu, který je obvykle probírán v prvních dvou semestrech bakalářského studia nematematických oborů. Jde o základy lineární algebry, diferenciální a integrální počet funkcí jedné a více proměnných, nekonečné řady, diferenciální rovnice, křivkový integrál a autonomní systémy.

Matematika bývá označována za královnu věd. Vyznačuje se nezpochybnitelností výsledků a nejvyšší mírou abstrakce a přesnosti, její krása spočívá v logické výstavbě.

Při psaní této učebnice jsme si kladli následující otázky: *Může být matematika stejně krásná jako hudba? Jak ukázat matematiku v tomto světle studentům, jejichž specializací matematika není?*

Cílem učebnice není naučit čtenáře jen derivovat a integrovat, ale vést jej také k analytickému myšlení, schopnosti definovat pojmy a formulovat problémy a tvrzení. Přitom jsme hledali vhodný poměr mezi matematickou přesností a srozumitelností tak, aby byla přístupná širokému okruhu čtenářů. V neposlední řadě jsme chtěli ukázat, že matematika nás obklopuje i v každodenním životě.

V každé kapitole je nejprve uveden matematický aparát, kdy formou definic zavedeme nové pojmy a formou matematických vět popíšeme vztahy mezi nimi. Každá matematická věta má předpoklady, za kterých dané tvrzení platí. Změníme-li předpoklady, tvrzení nemusí zůstat v platnosti, na což se občas v aplikacích zapomíná. Každou matematickou větu lze zcela exaktně dokázat, avšak důkazy vzhledem k rozsahu a zaměření textu nejsou uvedeny. Pochopení matematických pojmů a algoritmů je ilustrováno na velkém počtu řešených příkladů, následně jsou předvedeny aplikace v konkrétních úlohách s přírodovědnou a technickou tematikou.

Další zajímavé aplikace matematiky najdeme v medicíně, ekonomii, v humanitních a společenských vědách. Tyto aplikace jsme pro nedostatek místa nemohli zařadit, viz např. [2], [11], [17] nebo [21].

Závěrem bychom chtěli popřát všem studentům a čtenářům, aby se pro ně matematika stala zajímavou a inspirativní součástí jejich vědního oboru.

Brno, červenec 2014 Autoři

Kapitola 1

Lineární algebra

Obecně se dá říci, že lineární algebra je část matematiky, která se věnuje vektorovým prostorům a lineárním transformacím těchto prostorů. Jedná se ovšem o vysoce abstraktní pojmy a pokud bychom je chtěli poctivě zavést a studovat do všech detailů, museli bychom lineární algebře věnovat celou knihu. V této kapitole se tedy zaměříme jen na nejdůležitější objekty a metody, se kterými lineární algebra pracuje.

Jednou ze základních úloh lineární algebry je řešení *systémů lineárních rovnic*. K těmto systémům vede mnoho úloh z praxe (modelování v ekonomii, vyvažování chemických reakcí, popisy toků v sítích atd.) a navíc jsou užitečným nástrojem i v jiných odvětvích matematiky. Naučíme se tedy jednu z metod, jak takové systémy řešit – tzv. Gaussovu eliminační metodu. K tomuto účelu zavedeme základní pojmy lineární algebry: *matice a hodnost matice*. Dále se seznámíme s pojmem *determinant matice*, který budeme potřebovat v dalších kapitolách, a zavedeme tzv. *vlastní čísla*, jež později použijeme při řešení tzv. dynamických systémů.

1.1 Systémy lineárních rovnic a matice

Již na střední škole se řeší systém dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

pro neznámé x, y, kde a, b, c, d, e, f jsou nějaká daná reálná čísla. Tento systém se dá řešit například sčítací metodou, tj. postupem, kdy jednu rovnici vynásobíme vhodným číslem a sečteme s druhou rovnicí tak, abychom vyloučili jednu neznámou.

Tento systém můžeme interpretovat i geometricky. Každá rovnice představuje přímku v rovině a najít řešení znamená určit jejich průsečík. Dvě přímky mohou mít buď jeden průsečík (pak má systém jedno řešení), nebo splývají (systém má nekonečně mnoho řešení), nebo nemají žádný průsečík, tj. přímky jsou rovnoběžné (systém nemá žádné řešení).

Příklad 1.1. a) Systém dvou rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

má právě jedno řešení, kterým je $x = 1$, $y = 1$.

b) Systém

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

má nekonečně mnoho řešení. Není možné si ovšem představit, že když má tento systém nekonečně mnoho řešení, pak libovolná dvojice čísel je řešením systému. Těchto nekonečně mnoho řešení je například ve tvaru $(t, -t)$, kde t je libovolné reálné číslo.

c) Naopak systém

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 5 \end{aligned} \tag{1.3}$$

nemá žádné řešení. □

Podobné příklady bychom mohli uvést pro systémy více lineárních rovnic o více proměnných, přičemž naše představivost by byla limitována rovnicemi o třech neznámých, které by zastupovaly roviny v prostoru. Obecně můžeme uvažovat o libovolném počtu rovnic a neznámých, přitom se počet rovnic nemusí rovnat počtu neznámých.

Definice 1.2. *Systémem k lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$* rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \;\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Je-li $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$, nazývá se takovýto systém *homogenní.*

Řešením systému (1.4) je každá uspořádaná n-tice $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ takových čísel t_1, t_2,..., t_n, která dané soustavě vyhovuje.

Obecně (tj. nezávisle na počtu lineárních rovnic a počtu neznámých) jsou možné tři případy.

1. Systém rovnic má *právě jedno řešení.*
2. Systém rovnic má *nekonečně mnoho řešení.*
3. Systém rovnic nemá *žádné řešení.*

Základní otázkou tedy je, jak poznáme, který z těchto případů nastane? Odpověď úzce souvisí s pojmy matice a hodnost matice.

Definice 1.3. *Matice* je tabulka čísel. Je-li tato matice (tabulka) sestavená z m řádků a n sloupců, označujeme ji

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Říkáme, že A je matice typu $m \times n$, čísla a_{ij} nazýváme *prvky matice.* Matici typu $n \times 1$ nazýváme sloupcový vektor a matici typu $1 \times n$ řádkový vektor, stručně *vektor*.

Prvky matice mohou být i některé jiné matematické objekty, např. funkce. S takovými maticemi se setkáme v kapitolách o diferenciálních rovnicích a vícerozměrných integrálech.

Systém rovnic (1.4) můžeme reprezentovat následujícími maticemi a ty pak studovat místo něj.

Maticí systému (1.4) nazýváme matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Rozšířenou maticí systému (1.4) nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}.$$

Ještě než se ovšem dostaneme ke studiu našeho systému, seznámíme se s maticemi podrobněji.

Řekneme, že dvě matice A, B téhož typu $m \times n$ jsou si *rovny*, jestliže jsou si rovny všechny sobě odpovídající prvky těchto matic, tj.

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{pro všechny indexy } i, j.$$

Je-li $m = n$, nazýváme matici A *čtvercovou maticí* a číslo n *řádem* této matice A. Prvky $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ tvoří *hlavní diagonálu* matice A. Čtvercová matice, která má na hlavní diagonále samé jedničky a jinde má všechny prvky nulové, se nazývá *jednotková matice* a označujeme ji E. Jsou-li všechny prvky a_{ij} rovny nule, pak se A nazývá *nulová matice.*

S maticemi můžeme provádět následující operace.

Nechť $k \neq 0$ je reálné číslo. Výsledkem *násobení matice A číslem k* je matice C, jejíž prvky jsou tvaru

$$c_{ij} = ka_{ij}.$$

Tedy

$$C = k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \ldots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \ldots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \ldots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Nechť A, B jsou matice téhož typu $m \times n$. *Součtem* matic A, B nazýváme matici C, jejíž prvky jsou

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} C = A + B \quad &= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nechť A je matice typu $m \times n$ a B je matice typu $n \times p$. *Součinem* matic A a B (v tomto pořadí) nazýváme matici C, jejíž prvky jsou

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Prvek c_{ij} tedy vznikne tak, že vezmeme i-tý řádek matice A a j-tý sloupec matice B, vynásobíme sobě odpovídající prvky a vše sečteme.

Poznámka 1.4. i) Sčítat lze pouze matice stejného typu. Pro matice různého typu není součet definován.

ii) Operace násobení je definována pouze pro případ „$m \times n$ krát $n \times p$“. Z toho také vyplývá, že obecně neplatí rovnost $AB = BA$. Součin BA totiž vůbec nemusí být definován, přestože součin AB provést lze, viz Příklad 1.5. Nicméně i v případě, kdy lze násobit BA, rovnost $AB = BA$ obecně neplatí.

Příklad 1.5. Proveďte následující operace:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení. a) Součet matic je definován pouze pro matice stejného typu, přičemž pak sčítáme odpovídající prvky obou matic. V našem případě dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2-1 \\ -3-1 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Připomeňme, že součin dvou matic je definován pouze v případě, že první z nich má tolik sloupců, kolik řádků má druhá. V našem případě je součin definován a platí:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 3 & 3\cdot 3 + 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 3\cdot 2 + 0\cdot 0 + 1\cdot 2 \\ 5\cdot 1 + 4\cdot 1 + 2\cdot 3 & 5\cdot 3 + 4\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 5\cdot 2 + 4\cdot 0 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 15 & 17 & 14 \end{pmatrix}.$$

□

Maticemi nemusíme jen reprezentovat koeficienty lineárních rovnic, můžeme jimi celé systémy rovnou zapisovat, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 1.6. Systém rovnic (1.1) lze maticově zapsat pomocí matice typu 2×2, sloupcového vektoru, jehož prvky jsou neznámé x, y, a sloupcového vektoru, jehož prvky jsou čísla $2, 0$ z pravé strany rovnic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podobně systémy rovnic (1.2) a (1.3) jsou tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Systém (1.4) lze psát v maticovém tvaru

$$A \cdot X = B, \qquad \text{kde} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

□

1.2 Hodnost matice

Vraťme se nyní k otázce, který z možných případů při řešení lineárního systému rovnic nastane, tj. jak můžeme snadno rozlišit, kdy má systém právě jedno řešení, kdy nekonečně mnoho řešení a kdy žádné? Abychom na tuto otázku mohli odpovědět, musíme zavést pojem *hodnost matice*.

Připomeňme, že *vektor* je uspořádaná n-tice čísel nebo též matice typu $1 \times n$. Součin čísla s vektorem se provádí po složkách, tj. stejně, jako by se prováděl součin čísla s maticí typu $1 \times n$. Podobně je součet dvou vektorů totéž jako součet dvou matic typu $1 \times n$. Nulovým vektorem $\mathbf{o}$ rozumíme vektor složený se samých nul, tj. $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Definice 1.7. Řekneme, že vektory $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže z rovnosti

$$\alpha_1 \mathbf{u_1} + \cdots + \alpha_n \mathbf{u_n} = \mathbf{o}$$

plyne $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. V opačném případě, tj. když existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, tak, že

$$\alpha_1 \mathbf{u_1} + \cdots + \alpha_n \mathbf{u_n} = \mathbf{o}\,,$$

říkáme, že vektory $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$ jsou *lineárně závislé*.

Například vektory $\mathbf{u_1} = (1, 2)$ a $\mathbf{u_2} = (0, 3)$ jsou lineárně nezávislé. Vytvoříme-li totiž lineární kombinaci těchto vektorů

$$\alpha \cdot (1, 2) + \beta \cdot (0, 3) = (\alpha, 2\alpha) + (0, 3\beta) = (\alpha, 2\alpha + 3\beta)\,,$$

dostaneme vektor, který položíme roven nulovému vektoru, tj.

$$(\alpha, 2\alpha + 3\beta) = (0, 0)\,.$$

Odtud plyne, že $\alpha = 0$, $2\alpha + 3\beta = 0$, a proto také $\beta = 0$.

Naopak vektory $\mathbf{u_1} = (1, 2)$ a $\mathbf{u_2} = (2, 4)$ jsou lineárně závislé, protože například platí, že

$$2 \cdot (1, 2) - 1 \cdot (2, 4) = (0, 0)\,.$$

Nyní uvažujme matici A. Řádky matice můžeme chápat jako vektory a lineární nezávislost řádků matice pak znamená lineární nezávislost vektorů. Pomocí tohoto pojmu definujeme hodnost matice.

Definice 1.8. *Hodnost matice A* je číslo, které je rovno maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků. Označujeme ji $h(A)$.

Je-li A čtvercová matice typu $n \times n$, jejíž hodnost je rovna n, nazýváme ji *regulární* maticí. Je-li $h(A) < n$, nazývá se taková matice *singulární*.

Jak určíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice? Je zřejmé, že v nulové matici neexistuje žádný lineárně nezávislý řádek. Hodnost nulové matice je tedy rovna nule. V dalším proto uvažujme pouze nenulové matice, tj. předpokládejme, že je aspoň jeden prvek této matice nenulový. U matice 2×2 snadno poznáme, že jsou její řádky lineárně závislé. Nenulová matice A typu 2×2 má hodnost jedna, pokud je druhý řádek násobkem prvního řádku, tj. matice je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{pmatrix},$$

kde k je nějaké reálné číslo. V opačném případě má matice A hodnost dva.

Příklad 1.9. V příkladě 1.6 jsme viděli, že levé strany systémů (1.2) a (1.3) lze maticově zapsat pomocí stejné matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je rovna jedné (lineární závislost řádků je zřejmá). Naproti tomu levé strany systému (1.1) jsme zapsali pomocí matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je rovna dvěma (druhý řádek není násobkem prvního řádku). □

Zkoumání hodnosti matice vyššího typu než 2×2 je již trochu složitější. K vyšetřování lineární závislosti, resp. nezávislosti řádků matice využijeme následující věty.

Věta 1.10. *Hodnost matice se nezmění, jestliže:*

1. *zaměníme pořadí řádků,*
2. *vynásobíme libovolný řádek nenulovým číslem,*
3. *přičteme k danému řádku (nebo odečteme od daného řádku) libovolný násobek jiného řádku.*

Úpravy z předchozí věty souhrnně nazýváme *elementární řádkové úpravy*. Pomocí těchto úprav převedeme matici na tzv. schodovitý tvar, ze kterého již snadno určíme hodnost matice.

Definice 1.11. Řekneme, že A je *matice ve schodovitém tvaru*, jestliže v matici A každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předchozí řádek.

Je-li nenulová matice A ve schodovitém tvaru, pak svým tvarem skutečně odpovídá tomuto názvu, neboť nuly v matici A tvoří jakési „schody". Přitom první řádek může (ale nemusí) začínat nulou (resp. nulami), druhý řádek však již musí začínat alespoň jednou nulou, třetí řádek musí začínat alespoň dvěma nulami atd.

Příklad 1.12. Následující matice jsou ve schodovitém tvaru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Věta 1.13. *Každou matici lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést do schodovitého tvaru.*

Věta 1.14. *Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Příklad 1.15. Uvažujme matice z příkladu 1.12. Jejich hodnost je

$$h(A) = 3, \quad h(B) = 1, \quad h(C) = 2. \qquad \square$$

Algoritmus (postup) převodu matice na schodovitý tvar je následující:

1. V prvním kroku převedeme matici do tvaru, kdy má na pozici $(1,1)$ (první řádek a první sloupec) nenulový prvek a_{11} a ostatní prvky v prvním sloupci jsou nulové, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \end{pmatrix},$$

kde na pozici $\star$ stojí nějaké prvky (mohou být nenulové i nulové). Je-li $a_{11} \neq 0$, dosáhneme tohoto tvaru například tak, že první řádek opíšeme, a ke druhému řádku přičteme vhodný násobek prvního řádku tak, aby na pozici $(2,1)$ vznikla nula. Podobně postupujeme s ostatními řádky.

2. V druhém kroku chceme „vytvořit“ nuly ve druhém sloupci pod prvkem $\boxed{\star}$. Usilujeme tedy o tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \boxed{\star} & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix}.$$

   První dva řádky opíšeme a poté postupujeme obdobně jako v prvním kroku: od třetího řádku odečteme vhodný násobek druhého řádku, totéž pro čtvrtý řádek atd.

3. Postupnými úpravami převedeme matici na schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \star \end{pmatrix}.$$

   Počet nenulových řádků této matice je roven hodnosti zadané matice.

Uvedený algoritmus je názorně ilustrován v následujícím příkladě.

Příklad 1.16. Určete hodnost matice:

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. a) Připomeňme, že v prvním kroku se snažíme získat pod prvkem na pozici $(1,1)$ samé nuly. První řádek proto opíšeme. Od druhého řádku odečteme trojnásobek prvního řádku a od třetího řádku odečteme pětinásobek prvního řádku. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -15 \\ 0 & -6 & -24 \end{pmatrix}.$$

-

V druhém kroku usilujeme o samé nuly pod prvkem na pozici $(2,2)$. Opíšeme proto první dva řádky a od čtyřnásobku třetího odečteme šestinásobek druhého řádku, dostáváme tak matici ve schodovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -15 \\ 0 & -6 & -24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -15 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Počet nenulových řádků je tři, a proto i hodnost dané matice je tři.

b) Postupujeme analogicky jako v předchozím případě:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Počet nenulových řádků výsledné schodovité matice je dva, a proto je i hodnost zkoumané matice rovna dvěma. □

Nyní si konečně ukážeme, jak ze znalosti hodnosti matice systému a hodnosti rozšířené matice systému určíme počet řešení systému (1.4) (tj. zda má systém jediné řešení, nekonečně mnoho řešení, nebo nemá žádné řešení).

Podmínku, kdy má systém (1.4) řešení, udává následující věta.

Věta 1.17 (Frobeniova věta)**.** *Systém lineárních rovnic má řešení, právě když je hodnost matice systému rovna hodnosti rozšířené matice systému.*

V případě, jsou-li si hodnosti obou matic rovny, zbývá ještě zjistit, zda má systém pouze jedno, nebo nekonečně mnoho řešení. O tom rozhodneme na základě následujících dvou vět.

Věta 1.18. *Systém k lineárních rovnic o n neznámých má jediné řešení, jestliže je hodnost h matice systému rovna hodnosti rozšířené matice systému a navíc je rovna počtu neznámých n, tedy $h = n$.*

Z této věty plyne, že jediné řešení může mít pouze systém, kde $k \geq n$. Je-li totiž $k < n$, pak $h(A) \leq k < n$ (počet lineárně nezávislých řádků je zřejmě menší nebo roven počtu všech řádků) a situace popsaná ve větě 1.18 nemůže nastat. Slovy řečeno, jediné řešení může mít pouze systém, ve kterém je alespoň tolik rovnic, kolik neznámých.

Věta 1.19. *Systém k lineárních rovnic o n neznámých má nekonečně mnoho řešení, jestliže se hodnost h matice systému rovná hodnosti rozšířené matice a navíc je tato hodnost menší než počet neznámých, tj. $h < n$. V tomto případě lze $n - h$ neznámých volit libovolně.*

Homogenní systém rovnic (tj. na pravé straně systému jsou samé nuly) má vždy alespoň jedno řešení, a to tzv. *triviální* řešení $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$. Aby měl homogenní systém netriviální řešení (a tedy nekonečně mnoho řešení), musí podle věty 1.19 platit $h < n$.

Příklad 1.20. Uvažujme systémy z příkladu 1.1.

a) Rozšířená matice systému (1.1) je

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Hodnost této rozšířené matice je stejná jako hodnost matice systému, a to dvě, což je zároveň také počet neznámých. To odpovídá situaci popsané ve větě 1.18 a podle ní tedy má systém (1.1) právě jedno řešení.

b) Rozšířená matice systému (1.2) je

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Hodnost této rozšířené matice je stejná jako hodnost matice systému, a to jedna, což je číslo menší než počet neznámých. To odpovídá situaci popsané ve větě 1.19, a proto má systém (1.2) nekonečně mnoho řešení.

c) Rozšířená matice systému (1.3) je

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{array}\right).$$

Hodnost této rozšířené matice je dvě, ale hodnost matice systému je jedna. V tomto případě nemá podle Frobeniovy věty 1.17 systém (1.3) žádné řešení. □

1.3 Gaussova eliminační metoda

Již známe odpověď na otázku, kolik řešení má systém lineárních rovnic. Zbývá tedy nalézt řešení takovéhoto systému. Základní metodou řešení systému lineárních rovnic je tzv. *Gaussova eliminační metoda*.

Tato metoda je založena na tom, že řešení systému se nezmění, jestliže:

1. zaměníme pořadí rovnic,
2. vynásobíme libovolnou rovnici nenulovým číslem,
3. přičteme k dané rovnici libovolný násobek jiné rovnice.