Jiří Moučka, Petr Rádl

Matematika pro studenty ekonomie

2., upravené a doplněné vydání

- Lineární algebra
- Diferenciální a integrální počet
- Diferenciální rovnice
- Diferenční rovnice
- Teorie a 237 řešených příkladů

GRADA®

EXPERT

GRADA®

Jiří Moučka, Petr Rádl

Matematika pro studenty ekonomie

2., upravené a doplněné vydání

Grada Publishing

Doc. RNDr. Jiří Moučka, Ph.D.
RNDr. Petr Rádl

Matematika pro studenty ekonomie

2., upravené a doplněné vydání

Kniha je monografie

Vydala Grada Publishing, a.s.
U Průhonu 22, 170 00 Praha 7
tel.: +420 234 264 401, fax: +420 234 264 400
www.grada.cz
jako svou 5961. publikaci

Odborná recenze:
Prof. RNDr. Jan Chvalina, DrSc.
Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

Vydání odborné knihy schválila Vědecká redakce
nakladatelství Grada Publishing, a.s.

Odpovědní redaktoři Petr Somogyi, Kamila Nováková
Sazba Petr Somogyi
Návrh a zpracování obálky Jan Dvořák
Počet stran 272
Druhé vydání, Praha 2015
Vytiskla Tiskárna v Ráji, s.r.o., Pardubice

ISBN 978-80-247-9914-8 (pdf)
ISBN 978-80-247-5406-2 (print)

Obsah

O autorech

Doc. RNDr. Jiří Moučka, Ph.D.

Vystudoval odbornou matematiku na Přírodovědecké fakultě Univerzity Jana Evangelisty Purkyně (dnes Masarykova univerzita) v Brně (1974). V rámci doktorského postgraduálního studia na Masarykově univerzitě v Brně studoval vlastnosti diskrétních algebraických struktur (1997). Touto problematikou se zabýval i ve své habilitační práci, která byla zaměřena na aplikaci diskrétních matematických struktur pro modelování procesů (2002).

Pedagogicky působil na Fakultě ekonomiky obrany státu VVŠ PV ve Vyškově, na Fakultě ekonomiky a managementu Univerzity obrany v Brně a na Provozně ekonomické fakultě Mendelovy univerzity v Brně. Přednášel především matematiku pro studenty ekonomických specializací, operační analýzu a ekonomicko-matematické metody. Zpracoval řadu studijních textů a skript zaměřených na základní kurz vyšší matematiky, teorii her a lineární programování. Je autorem a spoluautorem několika desítek odborných článků v oblasti teorie algebraických hyperstruktur a matematického modelování. V současné době je garantem předmětu Matematika na Fakultě vojenského leadershipu Univerzity obrany v Brně a na Provozně ekonomické fakultě Mendelovy univerzity v Brně.

RNDr. Petr Rádl

Vystudoval Přírodovědeckou fakultu Univerzity Jana Evangelisty Purkyně (dnes Masarykova univerzita) v Brně, obor matematika a deskriptivní geometrie (1972). Zde v roce 1981 složil státní rigorózní zkoušku. Po absolvování základní vojenské služby je od roku 1973 zaměstnán na Mendelově univerzitě v Brně. Působil na Ústavu matematiky Lesnické a dřevařské fakulty, v letech 2004–2007 byl vedoucím tohoto ústavu.

Přednášel matematiku, konstruktivní geometrii a technické kreslení v různých studijních programech prezenční i kombinované formy studia na všech fakultách univerzity a je spoluautorem skript používaných ke studiu těchto předmětů. Řadu let byl garantem přijímacích zkoušek z matematiky na Mendelovu univerzitu a je vedoucím autorského kolektivu Sbírky příkladů z matematiky pro přijímací řízení. Externě přednášel technické kreslení na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně, kde byl také členem komise pro státní závěrečné zkoušky ve studijním programu Matematika a Aplikovaná matematika. Od roku 2008 působí na Ústavu statistiky a operačního výzkumu Provozně ekonomické fakulty Mendelovy univerzity v Brně a přednáší matematiku studentům této fakulty.

Úvod

Znalost exaktních metod ekonomických teorií by měla v současné době patřit k nezbytné výbavě každého pracovníka na jakékoliv úrovni ekonomické praxe. Z toho pro něj jednoznačně vyplývá nutnost seznámit se s jejich matematickými základy.

Stěžejním cílem autorů této učebnice, stejně jako cílem výuky matematiky na ekonomických fakultách, je poskytnout studentům základní znalosti vyšší matematiky využitelné při studiu navazujících ekonomicko-matematických předmětů a při studiu kvantitativních metod aplikovaných v odborných ekonomických disciplínách.

Učebnice je rozdělena do šesti kapitol, které na sebe logicky navazují. Pro úspěšné studium určité kapitoly je nezbytné zvládnutí látky z předchozích kapitol. Vždy se přitom požaduje znalost středoškolské matematiky v obvyklém rozsahu. V každé kapitole je formou definic a vět bez důkazů shrnuta potřebná teorie. Způsob výkladu je přitom přizpůsoben odbornému zaměření studentů, kteří nestudují matematiku jako takovou, ale potřebují ji umět vhodně využívat. Přímo v základním textu jsou probírané pojmy a metody ilustrovány množstvím řešených příkladů. Další úlohy, označené jako cvičení, jsou určeny k samostatnému řešení. Výsledky těchto cvičení jsou uvedeny na konci knihy. Definice, věty, příklady i obrázky jsou vždy označeny dvojicí číslic, z nichž první značí pořadové číslo kapitoly a druhá jejich pořadí uvnitř kapitoly. Značkou ■ jsou v textu kvůli větší přehlednosti označeny konce definic, vět a příkladů včetně jejich řešení.

Učebnice je určena především studentům prezenční i kombinované formy studia Provozně ekonomické fakulty Mendlovy univerzity v Brně a Fakulty vojenského leadershipu Univerzity obrany v Brně. Její obsah jednoznačně koresponduje se stávajícím studijním plánem prvních semestrů studia na zmíněných fakultách, kde oba autoři pedagogicky působí. Byla koncipována na základě skript a učebních textů, které jsou zaměřeny na dílčí části probírané problematiky a které byly používány při výuce základního kurzu matematiky na obou fakultách v posledním desetiletí. Zkušenosti z jejich používání, připomínky a názory jejich autorů i uživatelů byly při tvorbě této knihy využity a autoři za ně touto cestou srdečně děkují. Jedním z důležitých motivů vzniku předkládaného textu bylo shrnout celý obsah základního matematického kurzu do jediné učebnice, jejíž prostudování umožní studentům úspěšné zvládnutí předmětu Matematika.

Druhé vydání knihy reflektuje zkušenosti autorů a jejich spolupracovníků získané při jejím pětiletém intenzivním využívání.

Vzhledem k tomu, že mnohé další ekonomické fakulty v České republice mají ve svých studijních programech základní kurz vysokoškolské matematiky podobného obsahu i rozsahu, je možné, že po této učebnici sáhnou i studenti jiných vysokých škol, především ekonomického zaměření.

Všechny liché kapitoly napsal doc. RNDr. Jiří Moučka, Ph.D., autorem sudých kapitol je RNDr. Petr Rádl.

Za mnohé cenné rady a připomínky autoři děkují doc. RNDr. Josefu Kalasovi, CSc., RNDr. Ludmile Staré a RNDr. Milanu Vágnerovi.

Brno, srpen 2015 Autoři

KAPITOLA 1

Lineární algebra

Lineární algebra, jejíž základy se v této kapitole studují, se začala vytvářet jako samostatná matematická disciplína v 18. století, kdy byl zaveden pojem determinantu a ukázána metoda řešení soustavy *n* lineárních rovnic o *n* neznámých. V polovině 19. století se poprvé objevuje pojem matice a další metody řešení soustav lineárních rovnic. Lineární algebra však není pouze teoretickou matematickou disciplinou. Typická je její aplikovatelnost a široké použití v praxi. Bezprostředně je využíváno metod lineární algebry v lineárním programování, jež řeší celou řadu úloh ekonomického charakteru.

1.1 Základní pojmy z teorie množin

V úvodním odstavci uvádíme přehled základních pojmů teorie množin v míře nezbytně nutné pro pochopení všech dalších úvah. **Množinou** M rozumíme souhrn určitých objektů chápaný jako samostatný celek. Tyto objekty nazýváme **prvky množiny** a značíme a, b, x, y. Zápisem $a \in M$, resp. $a \notin M$ rozumíme, že a je, resp. a není prvkem množiny M. Pro každý objekt a a množinu M platí právě jedna z možností $a \in M$ nebo $a \notin M$. Množinu, která nemá žádný prvek, značíme symbolem $\varnothing$ a říkáme jí **prázdná množina**. Množinu, která je souhrnem prvků $b_1,\dots,b_n$ označujeme symbolem $\{b_1,\dots,b_n\}$.

Ze středoškolské matematiky jsou dále známy tyto zápisy a jejich význam:

$A = B$ – **rovnost** množin A, B,
$A \subseteq B$ – množina A je **podmnožina** množiny B,
$A \cap B$ – **průnik** množin A, B,
$A \cup B$ – **sjednocení** množin A, B,
$A - B$ – **rozdíl** množin A, B, tedy množina právě těch prvků $x \in A$, pro které platí $x \notin B$.

Nechť M_1, M_2 jsou dvě množiny. Množina všech uspořádaných dvojic (x_1, x_2), kde $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$, se nazývá **kartézský součin** množin M_1, M_2 a značí se $M_1 \times M_2$. Jsou-li M_1, M_2 libovolné množiny, pak **binární relací** z množiny M_1 do množiny M_2 nazýváme každou podmnožinu kartézského součinu $M_1 \times M_2$.

Zobrazením ***f*** **z množiny** M_1 **do množiny** M_2 nazýváme každou binární relaci $f \subseteq M_1 \times M_2$ takovou, že každému prvku $x_1 \in M_1$ je přiřazen nejvýše jeden prvek $x_2 \in M_2$ s vlastností $(x_1, x_2) \in f$. Někdy se používá značení $f\colon M_1 \to M_2$. Je-li při zobrazení f z množiny M_1 do množiny M_2 každému prvku $x_1 \in M_1$ přiřazen právě jeden prvek $x_2 \in M_2$, mluvíme o **zobrazení** ***f*** **množiny** M_1 **do množiny** M_2. Jestliže při zobrazení f z množiny M_1 do množiny M_2 existuje ke každému prvku $x_2 \in M_2$ alespoň jeden prvek $x_1 \in M_1$ tak, že $(x_1, x_2) \in f$, mluvíme o **zobrazení** ***f*** **z množiny** M_1 **na množinu** M_2. Jestliže je při zobrazení f z množiny M_1 do množiny M_2 každému prvku $x_1 \in M_1$ přiřazen právě jeden prvek $x_2 \in M_2$ a ke každému prvku $x_2 \in M_2$ existuje alespoň jeden prvek $x_1 \in M_1$ tak, že $(x_1, x_2) \in f$, mluvíme o **zobrazení** ***f*** **množiny** M_1 **na množinu** M_2.

Důležitou roli v matematice i v jiných vědách hraje pojem (algebraické) operace. **Binární operací** v množině M rozumíme každé zobrazení $M \times M \to M$, které každé uspořádané dvojici $(a,b) \in M$ přiřazuje nejvýše jeden prvek $c \in M$. Označíme-li binární operaci (dále jen operace) symbolem □ , můžeme psát $a \square b = c$.

Operaci □ nazýváme **komutativní** právě tehdy, když pro každé prvky $a, b \in M$ platí

$$a \square b = b \square a.$$

Operaci □ nazýváme **asociativní** právě tehdy, když pro každé prvky $a, b, c \in M$ platí

$$(a \square b) \square c = a \square (b \square c).$$

Operaci ● nazýváme **distributivní** zleva resp. zprava k operaci □ právě tehdy, když pro každé prvky $a, b, c \in M$ platí

$$a \bullet (b \square c) = (a \bullet b) \square (a \bullet c)$$

resp.

$$(b \square c) \bullet a = (b \bullet a) \square (c \bullet a).$$

Je-li operace ● komutativní, nemusíme rozlišovat zleva a zprava a používáme pouze jeden vztah

$$a \bullet (b \square c) = (a \bullet b) \square (a \bullet c).$$

Výše uvedené rovnosti bývají také nazývány komutativní, asociativní a distributivní zákon.

Existuje-li v množině M takový prvek e, že pro každé $x \in M$ platí rovnost $x \square e = e \square x = x$, nazývá se tento prvek **neutrální** vzhledem k operaci □. Je-li e neutrální prvek vzhledem k operaci □ a existuje-li k prvku $a \in M$ prvek $\overline{a} \in M$ s vlastností $a \square \overline{a} = \overline{a} \square a = e$, nazýváme prvek $\overline{a}$ **inverzní**, případně **opačný prvek** k prvku a na množině M.

Nejjednodušími příklady komutativních a asociativních operací jsou běžné operace sčítání a násobení na množině $\mathbf{N}_0$. Při operaci sčítání hraje roli neutrálního prvku číslo 0, při operaci násobení číslo 1. Inverzní prvek k žádnému číslu však v množině přirozených čísel neexistuje ani vzhledem k operaci sčítání, ani vzhledem k násobení. V množině reálných čísel jsou obě operace komutativní i asociativní a vzhledem k oběma operacím má každý prvek $a \in M$ inverzní prvek $\overline{a}$. Při sčítání je $\overline{a} = -a$, při násobení $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$, neutrální prvky jsou opět 0 a 1.

Ve všech základních číselných množinách je operace násobení distributivní k operaci sčítání, tj. $a \cdot (b + c) = ab + ac$.

S celou řadou jiných operací na různých množinách se budeme setkávat na dalších stranách této učebnice.

Operace, v níž se vyskytují pouze prvky množiny M, tj. $M \times M \to M$, se nazývá vnitřní. Vyskytují-li se při operaci kromě prvků množiny M i prvky jiné množiny, např. $\mathbf{R} \times M \to M$, mluvíme o operaci vnější. Neprázdná množina, na níž je definována alespoň jedna (algebraická) operace, se nazývá **algebraická struktura**. Významnou algebraickou strukturou je vektorový prostor. Jeho studiem se budeme zabývat v následující kapitole.

Pro označování základních číselných množin je všude použito pevných symbolů takto:

$\mathbf{N}$ – množina všech přirozených čísel,

$\mathbf{N}_0$ – množina všech přirozených čísel včetně nuly,

Z – množina všech celých čísel,
R – množina všech reálných čísel,
$\mathbf{R}^+$ – množina všech reálných kladných čísel,
C – množina všech komplexních čísel.

Cvičení

1.1 Rozhodněte, která tvrzení jsou pravdivá.
a) $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R}$, **b)** $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$, **c)** $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$, **d)** $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{R}$, **e)** $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$, **f)** $\mathbf{N} \cap \mathbf{R} = \mathbf{R}$, **g)** $\mathbf{N} \cap \mathbf{R} = \mathbf{N}$, **h)** $\mathbf{N} - \mathbf{R} = \emptyset$, **i)** $\mathbf{N} - \mathbf{N} = \emptyset$, **j)** $\mathbf{N} - \mathbf{R} = \mathbf{R} - \mathbf{N}$. **k)** $1 \in \mathbf{N} \cap \mathbf{Z}$, **l)** $1 \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$.

1.2 Pro množiny $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{d,e,f\}$ sestrojte uvedené množiny.
a) $A \cap B$, **b)** $B \cap A$, **c)** $A \cup B$, **d)** $B \cup A$, **e)** $A - B$, **f)** $B - A$, **g)** $A \times B$, **h)** $B \times A$.

1.3 Rozhodněte, která tvrzení jsou pravdivá a vyjadřují distributivní zákon.
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, **b)** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, **d)** $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$,
e) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$.

1.2 Vektorové prostory

1.2.1 Pojem vektorového prostoru

Vektorový prostor je algebraická struktura $(V, +, \cdot)$ se dvěma operacemi. V je množina libovolných prvků, které značíme ***a***, ***b***, ... a říkáme jim vektory. Na V jsou zavedeny operace sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem. Operace sčítání je komutativní a asociativní, existuje v ní neutrální prvek, kterým je **nulový vektor *o*** a ke každému vektoru ***a*** existuje **opačný vektor –*a***. Operace násobení vektoru reálným číslem je asociativní a platí pro ni distributivní zákony vzhledem k operaci sčítání vektorů.

Definice 1.1 Množina V libovolných prvků, které značíme ***a, b, ... x, y*** a říkáme jim vektory, se nazývá **vektorový prostor**, jestliže:

- Je dáno zobrazení $V \times V \to V$, jež každé uspořádané dvojici vektorů $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in V \times V$ přiřazuje vektor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$ tak, že pro každé vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ platí axiomy:

  (A1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$,
  (A2) $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$,
  (A3) existuje vektor $\boldsymbol{o} \in V$ takový, že pro každý vektor $\boldsymbol{a} \in V$ platí $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$,
  (A4) ke každému vektoru $\boldsymbol{a} \in V$ existuje vektor $\boldsymbol{a} \in V$ tak, že platí $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$.

Toto zobrazení se nazývá **sčítání** na množině V a vektor $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ je **součet** vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

□ Je dáno zobrazení $\mathbf{R} \times V \to V$, které každé uspořádané dvojici $(r, \boldsymbol{a}) \in \mathbf{R} \times V$ přiřazuje vektor $r\boldsymbol{a} \in V$ tak, že pro každá reálná čísla $r, s \in \mathbf{R}$ a každé vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ platí axiomy:

(A5) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$,
(A6) $r(s\boldsymbol{a}) = rs(\boldsymbol{a})$,
(A7) $(r+s)\boldsymbol{a} = r\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{a}$,
(A8) $r(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = r\boldsymbol{a} + r\boldsymbol{b}$.

Toto zobrazení se nazývá **násobení** vektoru **reálným číslem** a vektor $r\boldsymbol{a}$ se nazývá **reálný násobek** vektoru $\boldsymbol{a}$. ■

Místo pojmu vektorový prostor se lze v literatuře setkat také s názvem **lineární prostor**.

Definice vektorového prostoru je značně obecná. Této definici vyhovuje celá řada množin s vhodně definovanými operacemi. Vektorovými prostory jsou například:

a) Množina všech reálných posloupností s obvyklým sčítáním a násobením čísel, tedy $\{a_n + b_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}, \{ra_n\} = r\{a_n\}$.
b) Množina všech funkcí definovaných na libovolné neprázdné množině spolu s obvyklým sčítáním funkcí a násobením funkce reálným číslem, tedy $(f+g)(x) =$ $= f(x) + g(x)$, $(rf)(x) = rf(x)$.
c) Množina všech konvergentních posloupností.
d) Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic.
e) Množina všech matic stejného typu.

Rovněž pojem vektoru jakožto prvku vektorového prostoru je v tomto pojetí velmi obecný. Vektorem může být uspořádaná n-tice reálných čísel, ale také reálná funkce, reálná posloupnost, matice, reálné číslo apod.

Příklad 1.1 Uvažujme množinu všech přirozených čísel **N**, na které definujeme součet přirozených čísel a reálný násobek přirozeného čísla obvyklým způsobem. Rozhodněme, zda množina **N** spolu s operací reálného násobku je vektorový prostor.

Řešení Aby množina **N** byla vektorovým prostorem, musí podle definice vektorového prostoru platit:

a) Pro všechny vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ z množiny **N** je jejich součet $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ opět vektor z **N**, tedy množina **N** je uzavřená vzhledem ke sčítání.
b) Pro každé $r \in \mathbf{R}$ je $r\boldsymbol{a} \in \mathbf{N}$, tedy množina **N**, je uzavřená vzhledem k násobení reálným číslem.
c) V množině **N** platí axiomy (A1) až (A8).

Zatímco podmínka a) je zřejmě splněna, podmínka b) splněna není, neboť např. pro $r = -1$, $\boldsymbol{a} = 2$ neplatí $r\boldsymbol{a} \in \mathbf{N}$ a tedy množina **N** není uzavřená vůči násobení reálným číslem. Množina přirozených čísel **N** s obvykle definovanými operacemi tedy není vektorový prostor. ■

1.2.2 Aritmetický vektorový prostor

Definice 1.2 Uspořádanou n-tici reálných čísel $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$, $n \in \mathbf{N}$, nazýváme ***n*-rozměrným aritmetickým vektorem**. Reálná čísla $a_1, a_2,...,a_n$ nazýváme **souřadnicemi aritmetického vektoru *a***. ■

Definice 1.3 **Součtem aritmetických vektorů** $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1,...,b_n)$ nazýváme aritmetický vektor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1,...,a_n + b_n)$. ■

Příklad 1.2 Pro aritmetické vektory $\boldsymbol{a} = (-1,6,14)$ a $\boldsymbol{b} = (1, -17, -13)$ je jejich součtem aritmetický vektor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (0,-11,1)$. ■

Definice 1.4 Nechť $r \in \mathbf{R}$. **Reálným *r*-násobkem aritmetického vektoru** $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ je aritmetický vektor $r\boldsymbol{a} = (ra_1,...,ra_n)$. ■

Příklad 1.3 Pro aritmetické vektory $\boldsymbol{a} = (-1,6)$, $\boldsymbol{b} = (2, -4)$ platí $5\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} = (1,18)$. ■

Definice 1.5 **Opačným aritmetickým vektorem** k aritmetickému vektoru $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ nazýváme aritmetický vektor $-\boldsymbol{a} = (-a_1,...,-a_n)$. **Rozdílem aritmetických vektorů** $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ rozumíme součet aritmetického vektoru $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ a aritmetického vektoru opačného k aritmetickému vektoru $\boldsymbol{b} = (b_1,...,b_n)$, tedy $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = (a_1,...,a_n) + (-b_1,...,-b_n) = (a_1 - b_1,...,a_n - b_n)$. ■

Definice 1.6 Aritmetický vektor $\boldsymbol{o}$, jehož všechny souřadnice jsou rovny nule, tedy $\boldsymbol{o} = (0,...,0)$, nazýváme **nulovým aritmetickým vektorem**. ■

Definice 1.7 Řekneme, že aritmetický vektor $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ je **roven** aritmetickému vektoru $\boldsymbol{b} = (b_1,...,b_n)$ a píšeme $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, jestliže platí $a_j = b_j$ pro každé $j \in \{1,...,n\}$. ■

Označme nyní symbolem V_n množinu všech n-rozměrných aritmetických vektorů.

Věta 1.1 Jestliže na množině V_n definujeme součet aritmetických vektorů z V_n a reálný násobek aritmetického vektoru z V_n vztahy

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1,...,a_n + b_n),\ r\boldsymbol{a} = (ra_1,...,ra_n),$$

pak V_n je vektorový prostor. ■

Definice 1.8 Množina V_n všech aritmetických vektorů, na které jsou definovány operace sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem vztahy

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1,...,a_n + b_n) \text{ a } r\boldsymbol{a} = (ra_1,...,ra_n),$$

se nazývá n-rozměrný **aritmetický vektorový prostor**. ■

Z definice aritmetického vektorového prostoru a předcházející věty je zřejmé, že každý aritmetický vektorový prostor je vektorovým prostorem ve smyslu definice 1.1 a stejně tak každý aritmetický vektor je vektorem.

Kromě operace násobení vektoru reálným číslem, zavádíme v aritmetickém vektorovém prostoru ještě jiné násobení, a to tzv. skalární součin vektorů.

Definice 1.9 **Skalárním součinem** aritmetických vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1,...,b_n)$ rozumíme číslo $\boldsymbol{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. ■

Příklad 1.4 Skalárním součinem aritmetických vektorů $\boldsymbol{a} = (6, -3, 0, -9)$ a $\boldsymbol{b} = (2, -1, 5, -3)$ je číslo $\boldsymbol{ab} = 6 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + (-9) \cdot 3 = -12$. ■

1.2.3 Podprostor vektorového prostoru

Definice 1.10 Nechť V je vektorový prostor, W neprázdná podmnožina množiny V. Řekneme, že množina W je **podprostor vektorového prostoru** V a píšeme $W \subset V$, jestliže platí:

(1) Pro každou dvojici vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in W$ je $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$.
(2) Pro každé reálné číslo $r \in \mathbf{R}$ a každý vektor $\boldsymbol{a} \in W$ je $r\boldsymbol{a} \in W$. ■

Podprostor W vektorového prostoru V je vždy vektorovým prostorem. Vyplývá to z toho, že v podprostoru W platí axiomy (*A1*)–(*A8*) a podle podmínek (1) a (2) z definice podprostoru je množina W uzavřená vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem.

Nechť $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor vektorového prostoru V. Jednoprvková množina obsahující pouze nulový vektor, tedy množina $\{\boldsymbol{o}\}$ je podprostor vektorového prostoru V. Množina $\{\boldsymbol{o}\}$ se nazývá **triviální vektorový prostor**. Triviální vektorový prostor je jediný vektorový prostor, který má konečný počet prvků (obsahuje-li vektorový prostor alespoň jeden nenulový vektor, pak obsahuje současně všechny reálné násobky tohoto vektoru a těch je nekonečný počet).

Ve smyslu shora uvedené definice je podprostorem libovolného vektorového prostoru V také celý vektorový prostor V.

Definice 1.11 Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ jsou prvky vektorového prostoru V. Řekneme, že vektor $\boldsymbol{a}$ je **lineární kombinací** vektorů $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$, jestliže existují reálná čísla $c_1, \dots, c_k$ taková, že platí $\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + c_k\boldsymbol{a}_k$. Čísla $c_1, \dots, c_k$ se nazývají **koeficienty lineární kombinace**. ■

Příklad 1.5 Nulový vektor $\boldsymbol{o}$ je lineární kombinací libovolné skupiny vektorů $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ z vektorového prostoru V, protože platí $\boldsymbol{o} = 0\boldsymbol{a}_1 + \dots + 0\boldsymbol{a}_k$. Lineární kombinace vektorů, ve které jsou všechny koeficienty rovny nule, se nazývá **triviální lineární kombinace**. ■

Příklad 1.6 Zjistěme, zda vektor $\boldsymbol{a} = (2, 1, 6)$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1 = (4, 0, -1)$ a $\boldsymbol{a}_2 = (2, 0, 5)$.
Řešení Podle definice lineární kombinace je třeba najít reálná čísla c_1, c_2 tak, aby platilo

$$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 .$$

Po dosazení souřadnic vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ do této rovnice obdržíme

$$(2, 1, 6) = (4c_1 + 2c_2, 0c_1 + 0c_2, -1c_1 + 5c_2).$$

Podle definice rovnosti aritmetických vektorů to znamená, že platí

$$2 = 4c_1 + 2c_2 ,$$
$$1 = 0c_1 + 0c_2 ,$$
$$6 = -1c_1 + 5c_2 .$$

Zřejmě neexistují žádná reálná čísla c_1, c_2 vyhovující této soustavě rovnic (viz druhá rovnice), proto vektor $\boldsymbol{a}$ není lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$. ■

Pojem lineární kombinace vektorů nám umožňuje demonstrovat další příklad podprostoru vektorového prostoru V. Uvažujme vektory $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_k}$ z vektorového prostoru V. Označme $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k]$ množinu všech lineárních kombinací vektorů $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$, tedy $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k] = \{\mathbf{a} \in V ; \boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + c_k\boldsymbol{a}_k,\ c_1,\ldots,c_k \in \mathbf{R}\}$.

Definice 1.12 Nechť $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_k}$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Množina $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k]$ všech lineárních kombinací vektorů $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_k}$ se nazývá **lineární obal** množiny vektorů $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$. ■

Věta 1.2 Jsou-li $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$ vektory z vektorového prostoru V, pak je jejich lineární obal $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k]$ podprostor vektorového prostoru V. ■

Lineární obal $[\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k]$ je podprostor vektorového prostoru a jako takový je sám vektorovým prostorem. Vektorový prostor $[\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k]$ je zřejmě „nejmenší“ vektorový prostor obsahující všechny vektory $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_k}$.

Definice 1.13 Nechť $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_k}$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Jestliže každý vektor $\boldsymbol{a} \in V$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_k}$, říkáme, že vektorový prostor V je **generován** vektory $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_k}$ a této množině vektorů říkáme **množina generátorů** vektorového prostoru V. ■

Z uvedené definice vyplývá, že množina vektorů $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_k}$ je množinou generátorů vektorového prostoru V právě tehdy, když platí $V = [\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_k}]$.

Triviální vektorový prostor je generován nulovým vektorem $\boldsymbol{o}$.

Příklad 1.7 Dvojice vektorů $\boldsymbol{j_1} = (1, 0)$, $\boldsymbol{j_2} = (0, 1)$ je množinou generátorů aritmetického vektorového prostoru V_2. Snadno ověříme, že libovolný vektor $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2)$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{j_1}$, $\boldsymbol{j_2}$ ve tvaru $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{j_1} + a_2\boldsymbol{j_2}$. ■

Příklad 1.8 Rozhodněme, zda vektory $\boldsymbol{x} = (1, -3)$, $\boldsymbol{y} = (-1, 4)$ jsou množinou generátorů aritmetického vektorového prostoru V_2.

Řešení Vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ generují prostor V_2, jestliže pro každý vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ existují reálná čísla c_1, c_2 tak, že platí $\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{x} + c_2\boldsymbol{y}$.

Po dosazení souřadnic vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ do předchozího vztahu obdržíme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých c_1, c_2:

$$a_1 = c_1 - c_2,$$
$$a_2 = -3c_1 + 4c_2.$$

Vynásobíme-li první rovnici čtyřmi a obě rovnice sečteme, získáme $c_1 = 4a_1 + a_2$.

Obdobně po vynásobení první rovnice třemi a následném sečtení máme

$$c_2 = 3a_1 + a_2.$$

Protože každý vektor $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2)$ z V_2 je možné napsat ve tvaru $\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{x} + c_2\boldsymbol{y} = (4a_1 + a_2)\boldsymbol{x} + (3a_1 + a_2)\boldsymbol{y}$, je prostor V_2 generován vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$. ■