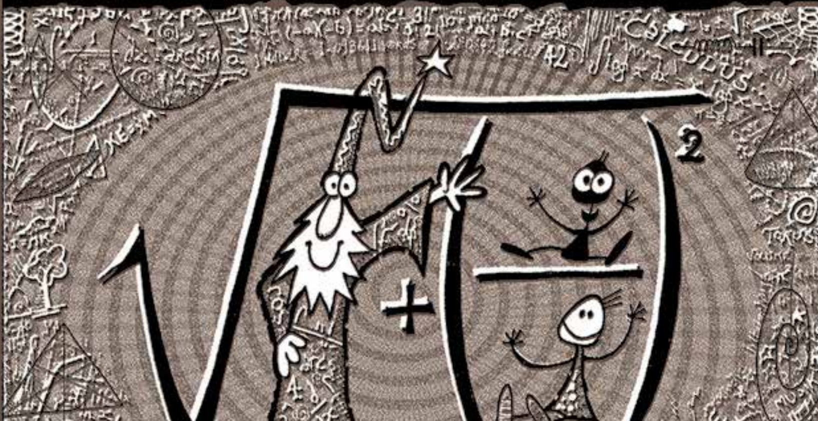
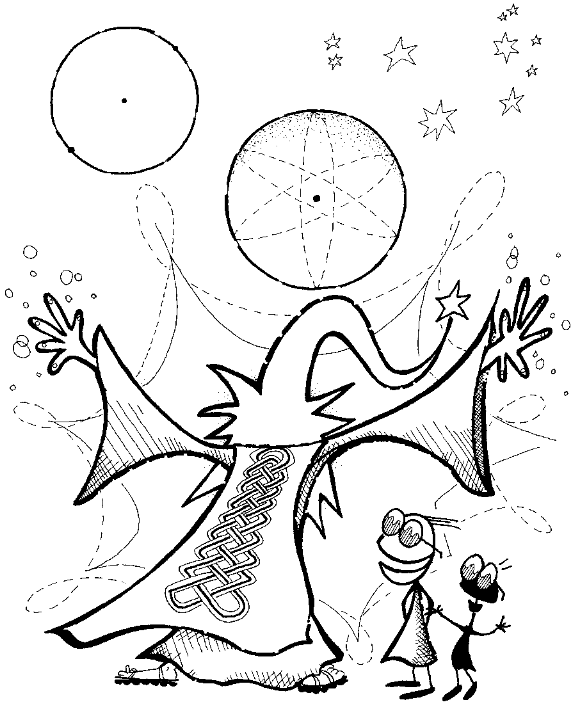
Nepostradatelné matematické a fyzikální vzorce



Matthew Watkins



Uzly se dají vázat pouze v trojrozměrném prostoru. V méně než třech dimenzích nelze uzel zavázat, ve vícedimenzionálním prostoru se naopak každý uzel rozváže.

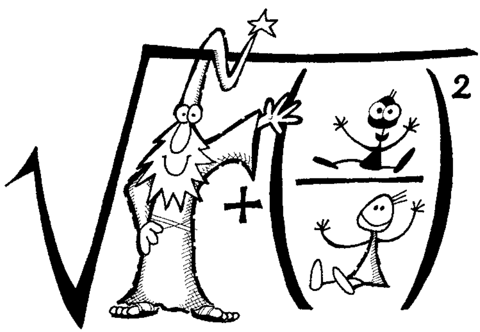
Matthew Watkins
NEPOSTRADATELNÉ MATEMATICKÉ A FYZIKÁLNÍ VZORCE

Design and typeset by Wooden Books Ltd, Glastonbury, UK.

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).
Z anglického originálu *Useful Mathematical & Physical Formulae* přeložila Jiřina Vítů.
Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.
Redakce Marie Černá.
Sazba Tomáš Schwarzbacher Zeman.
Konverze do elektronické verze Michal Puhač.
Vydalo v roce 2016 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, Praha 5, dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 808. publikaci (214. elektronická).

ISBN 978-80-7363-747-7

Nepostradatelné
matematické a fyzikální
VZORCE



sestavil

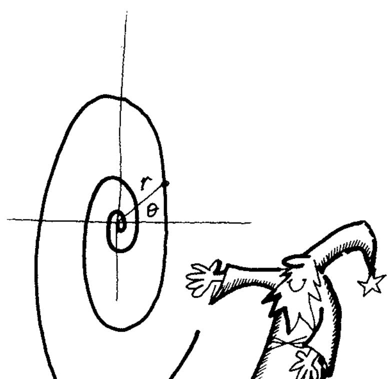
Matthew Watkins

ilustrace

Matt Tweed

Tuto knihu věnuji mamince a tatínkovi, a také Inge,
která mi ukázala, že ty opravdu důležité věci
asi nelze vyjádřit rovnicemi.

Jako rozšiřující literaturu doporučuji
Number and Time (Číslo a čas) od Marie-Louise von Franzové
a *A Beginner's Guide to Constructing the Universe: The Mathematical Archetypes of Nature, Art and Science* (Jak sestrojit vesmír pro začátečníky: Matematické archetypy přírody, umění a vědy) od Michaela S. Schneidera.



Obsah

Rovnice kvantové mechaniky

Planck – kvantum energie

$$E = hf$$

h = Planckova konstanta

rychlost světla

$$c = f\lambda$$

f = frekvence

de Broglieova vlna

$$\lambda = h/p$$

hybnost

$$p = mc$$

m = hmotnost

$$i = \sqrt{-1}$$

vlnové číslo

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}$$

Einstein – energie

$$E = mc^2 = pc$$

Diracova konstanta

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

kinetická energie

$$E = \tfrac{1}{2}mc^2 = \frac{p^2}{2m}$$

úhlová rychlost

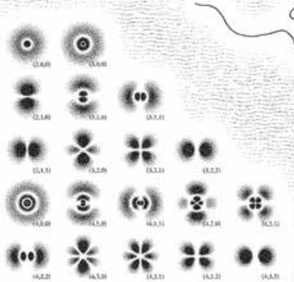
$$\omega = 2\pi f = \frac{Et}{\hbar}$$

vlnová funkce v klasické mechanice

$$\psi = A\cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda} - \omega t\right)$$

Eulerova rovnice

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$



Schrödingerova rovnice

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,z,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z)\right)\psi(x,y,z,t)$$

operátor energie

kinetická energie + potenciální energie

dávají pravděpodobnost

Hamiltonův operátor

zjednodušený tvar

$$\hat{E}\psi = \hat{H}\psi$$

∇^2 je Laplaceův operátor $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Úvod

V této knize předkládáme čtenáři základní matematické a fyzikální vzorce v přívětivé a snadno použitelné podobě.

Využití čísel a symbolů k modelování, předpovídání a ovládání reality je mocnou zbraní a může někdy připomínat i magii. Kdo ovládne tyto schopnosti, nestává se ale bohužel automaticky moudrým a prozíravým. I kvůli tomu jsme svědky šíření nebezpečných technologií, rostoucí touhy lidí po *kvantitě* a snahy podřizovat vše pouze ekonomickému růstu. Čtenáře proto nabádáme, aby obsah této knihy používal s příslušnou obezřetností.

Na druhou stranu, s pomocí matematiky můžeme nacházet souvislosti i ve zdánlivě velmi odlišných oblastech. Například světlo a elektřina, dříve dvě nezávislá témata, jsou nyní spojena teorií *elektromagnetického pole*.

Skvělým příkladem „dvousečné zbraně“ je pravděpodobně nejznámější rovnice na světě, Einsteinova $E = mc^2$, která bude navždy spojena jak s vynálezem jaderných zbraní, tak i s vědeckým objevem jednoty hmoty a energie.

Ať vás úžas a potěšení z vědění nikdy neopouští!

Trojúhelníky
a jejich různé středy

V *pravoúhlém trojúhelníku* platí *Pythagorova věta*: obsah čtverce sestrojeného nad přeponou (stranou protilehlou pravému úhlu) je roven součtu obsahů čtverců nad dvěma kratšími stranami – odvěsnami (*naproti vlevo nahoře*):

$a^2 + b^2 = c^2$ nebo ekvivalentně $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Součet vnitřních úhlů trojúhelníku = 180° neboli π *radián*ů.

Obvod $o = a + b + c$

Obsah $S = \frac{1}{2} bv = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$ (*naproti vpravo nahoře*)

Sinová věta: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r$, kde r je *poloměr kružnice opsané*.

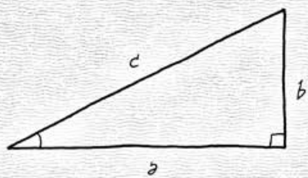
Těžnice spojuje vrchol se středem protilehlé strany. Všechny tři *těžnice* se protínají v jednom bodě, který se nazývá těžiště:

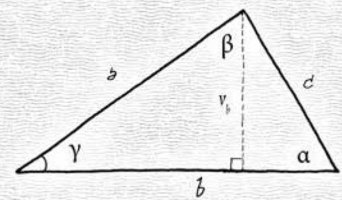
$$t_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \qquad t_b = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(c^2 + a^2) - b^2}$$
$$t_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

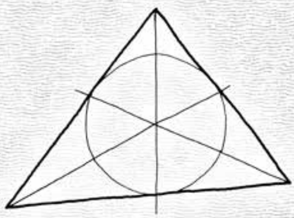
Výška je úsečka procházející vrcholem, která je kolmá na protilehlou stranu (nebo její prodloužení vně trojúhelníka):

$$v_a = \frac{2S}{a} \qquad v_b = \frac{2S}{b} \qquad v_c = \frac{2S}{c}$$

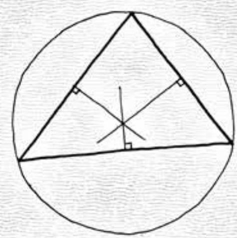
Všechny tři výšky se protínají v *ortocentru*.



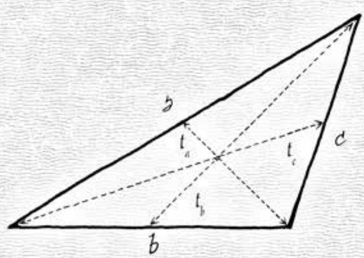




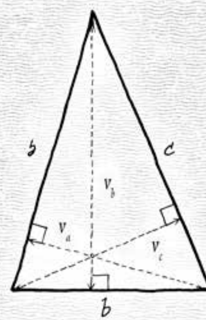
střed kružnice vepsané leží
v průsečíku os úhlů



střed kružnice opsané leží



těžnice spojují vrcholy a středy stran



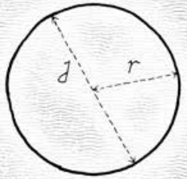
výšky se protínají v ortocentru
(které nemusí vždy ležet uvnitř trojúhelníka)

Rovinné obrazce

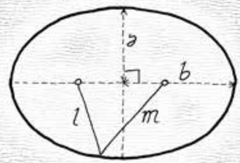
obvody a obsahy

V této kapitole jsou uvedeny vzorce pro výpočet obvodu a obsahu různých rovinných obrazců.

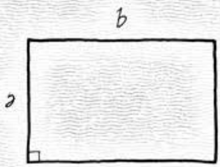
Kružnice, kruh:	Poloměr = r, průměr $d = 2r$ Obvod $o = 2\pi r = \pi d$ Obsah $S = \pi r^2$, kde $\pi = 3{,}14159265\ldots$
Elipsa:	$S = \pi ab$ b a a je po řadě *hlavní a vedlejší poloosa.* Vyznačené body na hlavní poloose jsou *ohniska*, platí, že $l + m$ je konstantní pro libovolný bod na elipse.
Obdélník:	$o = 2(a + b)$ $S = ab$
Kosodélník:	$o = 2(a + b)$ $S = bv = ab \sin\alpha$
Lichoběžník:	$o = a + b + v\,(\csc\alpha + \csc\beta)$ $S = \frac{1}{2}v(a + b)$
Pravidelný n-úhelník:	$o = nb$ $S = \frac{1}{4}nb^2 \operatorname{cotg}(180°/n)$ Všechny strany a vnitřní úhly mají stejnou velikost.
Obecný čtyřúhelník (i):	$S = \frac{1}{2}ab \sin\gamma$
Obecný čtyřúhelník (ii):	$S = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)b + \frac{1}{2}av_1 + \frac{1}{2}cv_2$



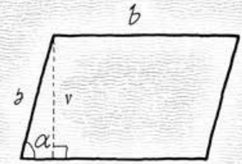
kružnice



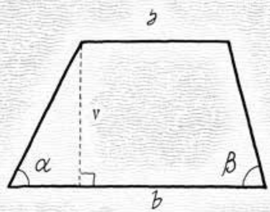
elipsa



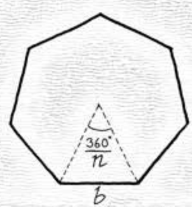
obdélník



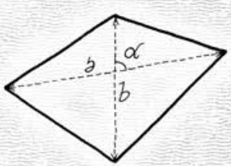
kosodélník



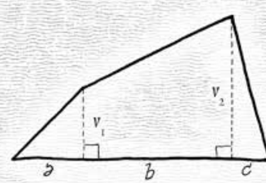
lichoběžník



pravidelný *n*-úhelník



obecný čtyřúhelník (i)



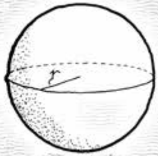
obecný čtyřúhelník (ii)

Tělesa

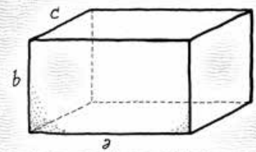
povrchy a objemy

V této kapitole jsou uvedeny vzorce pro výpočet povrchu a objemu osmi těles. (Povrch je uveden včetně podstavy.)

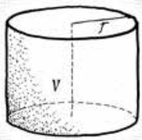
Koule:	Povrch $S = 4\pi r^2$
	Objem $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Kvádr:	$S = 2(ab + ac + bc)$
	$V = abc$
Válec:	$S = 2\pi rv + 2\pi r^2$
	$V = \pi r^2 v$
Kužel:	$S = \pi r\sqrt{r^2 + v^2} + \pi r^2$
	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$
Jehlan:	Obsah podstavy $= S_p$
	$V = \frac{1}{3} S_p v$
Komolý kužel:	$S = \pi(a + b)c + \pi a^2 + \pi b^2$
	$V = \frac{1}{3}\pi v(a^2 + ab + b^2)$
Elipsoid:	$V = \frac{4}{3}\pi abc$
Torus:	$S = \pi^2(b^2 - a^2)$
	$V = \frac{1}{4}\pi^2(a + b)(b - a)^2$



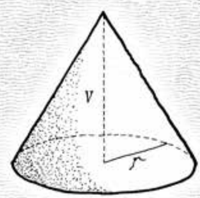
Koule



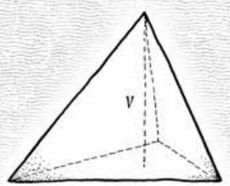
kvádr (pravidelný čtyřboký hranol)



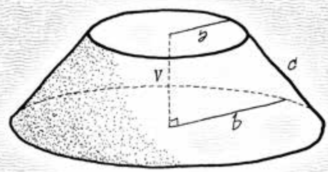
Válec



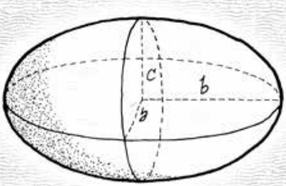
kužel



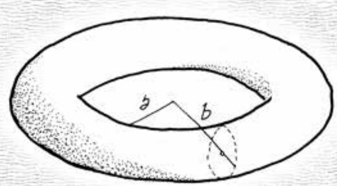
n-boký jehlan s obsahem podstavy S_p



komolý kužel



elipsoid



torus (anuloid)

ANALYTICKÁ GEOMETRIE

osy, přímky, směrnice a průsečíky

Dvojice os umístěných v rovině a svírajících pravý úhel nám umožňuje definovat bod pomocí dvojice reálných čísel (*naproti*). Osy se protínají v *počátku*, bodě [0; 0]. Horizontální poloha je běžně označována jako souřadnice x, vertikální jako souřadnice y.

Přímka v rovině má rovnici $y = mx + c$, kde m je směrnice přímky, která určuje její sklon. Přímka protíná osu y v bodě $[0; c]$ a osu x v bodě $[-c/m; 0]$.

Vertikální přímka má ve všech bodech konstantní souřadnici x, její rovnice je tedy $x = k$.

Přímka se směrnicí n procházející bodem $[x_0; y_0]$ má rovnici $y = nx + (y_0 - nx_0)$. Přímka k ní kolmá má směrnici $-1/n$.

Rovnice přímky procházející body $[x_1; y_1]$ a $[x_2; y_2]$ je

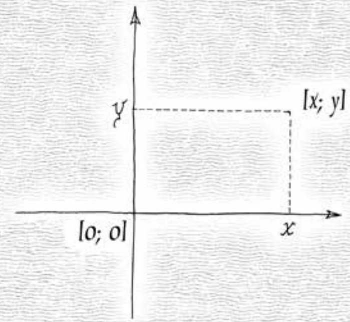
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) + y_2 \quad \text{pro } x_1 \neq x_2.$$

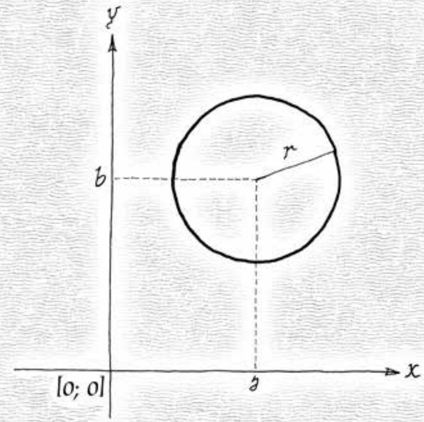
Pro úhel θ, který svírají přímky se směrnicemi m a n, platí

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m - n}{1 + mn}.$$

Kružnice o poloměru r se středem v bodě [a; b] je dána rovnicí $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

V trojrozměrném prostoru je přidána osa z a mnohé rovnice jsou analogické. Například koule o poloměru r se středem v bodě [a; b; c] je dána rovnicí $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$. Obecná rovnice roviny v trojrozměrném prostoru je $ax + by + cz = d$.





kružnice $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$