

# Pokročilejší metody statistické regulace procesu



- Alternativy k Shewhartovým regulačním diagramům
- Ověřování předpokladů
- Praktické aspekty SPC
- Diagramy pro vysoce způsobilé procesy
- Vícerozměrné regulační diagramy
- Hodnocení způsobilosti a výkonnosti procesu



# Pokročilejší metody statistické regulace procesu



**Nakladatelství děkuje za podporu při vydání knihy společnosti Versa Systems s.r.o.**

www.versasys.cz



**Doc. Ing. Eva Jarošová, CSc.**  
**Prof. Ing. Darja Noskievičová, CSc.**

## **Pokročilejší metody statistické regulace procesu**

Kniha je monografie

Vydala Grada Publishing, a.s.  
U Průhonu 22, 170 00 Praha 7  
tel.: +420 234 264 401, fax: +420 234 264 400  
www.grada.cz  
jako svou 6075. publikaci

### **Autorský kolektiv:**

Doc. Ing. Eva Jarošová, CSc. – autorka kapitol 2, 4, 10–12 a oddílů 5.1, 5.4, 8.5–8.7, 9.5  
Prof. Ing. Darja Noskievičová, CSc. – autorka kapitol 1, 3, 6, 7 a oddílů 5.2, 5.3, 8.1–8.4, 9.1–9.4

### **Odborná recenze:**

Prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.  
Prof. Ing. Milan Terek, PhD.

Vydání odborné knihy schválila Vědecká redakce nakladatelství Grada Publishing, a.s.

Odpovědný redaktor PhDr. Milan Pokorný  
Grafická úprava a sazba Milan Vokál  
Návrh a zpracování obálky Jan Dvořák  
Počet stran 296  
První vydání, Praha 2015  
Vytiskla tiskárna PowerPrint, s.r.o., Praha

© Grada Publishing, a.s., 2015  
Cover Photo © fotobanka allphoto

ISBN 978-80-247-5884-8 (pdf)  
ISBN 978-80-247-5355-3 (print)

### **Upozornění pro čtenáře a uživatele této knihy**

*Všechna práva vyhrazena. Žádná část této tištěné či elektronické knihy nesmí být reprodukována a šířena v papírové, elektronické či jiné podobě bez předchozího písemného souhlasu nakladatele. Neoprávněné užití této knihy bude **tretně stíháno**.*

# Obsah

<b>O autorkách</b> .....	<b>11</b>
<b>Úvod</b> .....	<b>12</b>
Cíl publikace .....	12
Stručně k tématu .....	12
Struktura publikace .....	13
Metodika .....	14
<b>1. Podstata statistické regulace procesu</b> .....	<b>16</b>
1.1 Základní charakteristika klasického regulačního diagramu .....	18
1.2 Riziko falešného a chybějícího signálu .....	20
1.2.1 Výpočet rizika $\alpha$ pro regulační diagram Shewhartova typu pro průměry .....	21
1.2.2 Výpočet rizika $\beta$ pro regulační diagram pro průměry .....	22
1.3 Aplikace regulačního diagramu .....	23
1.4 Hodnocení účinnosti regulačního diagramu .....	24
1.4.1 ARL pro klasické Shewhartovy regulační diagramy .....	24
1.4.2 Křivka ARL .....	25
1.4.3 Operativní charakteristika regulačního diagramu .....	26
Literatura .....	27
<b>2. Předpoklady statistických metod a typy procesů</b> .....	<b>28</b>
2.1 Předpoklad normality .....	28
2.1.1 Testy normality .....	29
2.1.2 Grafické metody .....	30
2.1.3 Rozhodování o platnosti předpokladu .....	32
2.2 Nezávislost .....	38
2.2.1 Testy náhodnosti .....	39
2.2.2 Testy autokorelace .....	42
2.3 Shoda středních hodnot .....	44
2.4 Shoda rozptylů .....	44
2.5 Testy odlehklých pozorování .....	45
2.6 Typy procesů .....	45
2.6.1 Procesy typu A .....	46
2.6.2 Procesy typu B .....	47
2.6.3 Procesy typu C .....	47
2.6.4 Procesy typu D .....	49
Literatura .....	49
<b>3. Praktické aspekty implementace SPC</b> .....	<b>51</b>
3.1 Etapy statistické regulace procesu .....	51

3.1.1	Přípravná etapa .....	51
3.1.2	Etapa zabezpečení statisticky zvládnutého procesu .....	52
3.1.3	Etapa analýzy a zabezpečení způsobilosti procesu .....	53
3.1.4	Etapa dlouhodobé regulace procesu .....	53
3.2	Tvorba logických podskupin .....	53
3.3	Velikost výběru a kontrolního intervalu .....	56
3.4	Volba regulačního diagramu .....	59
	Literatura .....	62
<b>4.</b>	<b>Regulační diagramy s asymetrickými mezemi .....</b>	<b>63</b>
4.1	Konstrukce pravděpodobnostních mezí .....	64
4.2	Transformace .....	68
	Literatura .....	73
<b>5.</b>	<b>Diagramy pro procesy typu C .....</b>	<b>75</b>
5.1	Diagram s rozšířenými mezemi .....	75
5.1.1	Diagram s pásmem pro střední hodnotu .....	76
5.1.2	Regulační meze jako hranice kolísání průměrů .....	79
5.2	Modifikovaný regulační diagram .....	80
5.2.1	Stanovení intervalu přípustné fluktuace střední hodnoty .....	80
5.2.2	Stanovení regulačních mezí .....	81
5.2.3	Postup aplikace modifikovaného regulačního diagramu .....	83
5.3	Přejímací regulační diagram .....	86
5.3.1	Návrh přejímacího regulačního diagramu .....	86
5.3.2	Postup při aplikaci přejímacího regulačního diagramu .....	90
5.4	Proces s trendem .....	92
5.4.1	Využití modifikovaného diagramu .....	93
5.4.2	Zjednodušený přejímací diagram .....	96
5.4.3	Rozšířené meze .....	96
5.4.4	Regresní regulační diagram .....	96
	Literatura .....	100
<b>6.</b>	<b>Regulační diagramy pro procesy s nízkým stupněm opakovatelnosti a s krátkými výrobními cykly .....</b>	<b>102</b>
6.1	Postupy pro schválení nastavení procesu .....	102
6.1.1	Předregulace .....	103
6.1.2	Wheelerova metoda .....	104
6.2	Sdružování dat .....	104
6.2.1	Cílové regulační diagramy .....	105
6.2.2	Standardizované regulační diagramy .....	109
6.3	Samostartovací metody .....	115
6.3.1	Metody založené na úpravě regulačních mezí .....	115
6.3.2	Q diagramy .....	117
6.4	Regulace vstupních parametrů .....	120
	Literatura .....	120

<b>7. Regulační diagramy pro vzájemně závislá data</b>	<b>122</b>
7.1 Metoda prodloužení kontrolního intervalu	123
7.2 Přístup založený na modelech časových řad	125
7.2.1 Regulační diagramy pro rezidua modelů ARIMA	125
7.2.2 Aproximační postup založený na využití statistiky EWMA	132
7.2.3 Dynamický diagram EWMA	133
7.2.4 Přístup založený na modifikaci regulačních mezí	135
7.3 Přístup bez použití modelu	139
Literatura	144
<b>8. Regulační diagramy CUSUM</b>	<b>146</b>
8.1 Princip metody CUSUM	146
8.2 Diagram CUSUM pro regulaci střední hodnoty procesu	147
8.2.1 Princip a aplikace rozhodovací masky	148
8.2.2 Diagram CUSUM s rozhodovacími mezemi	150
8.2.3 Standardizovaný CUSUM	153
8.2.4 Vlastnosti diagramu CUSUM	153
8.2.5 Návrh diagramu CUSUM s rozhodovacími mezemi	157
8.2.6 FIR CUSUM	160
8.2.7 Zlepšení detekce větších odchylek	163
8.2.8 Aplikace diagramu CUSUM s rozhodovacími mezemi	163
8.3 Nesplněné předpoklady	164
8.3.1 Postup při porušení normality	164
8.3.2 Postup při nepřesném odhadu parametrů procesu	165
8.3.3 Řešení autokorelace	167
8.4 CUSUM pro regulaci inherentní variability procesu	168
8.5 CUSUM pro počet neshod	169
8.6 Diagram CUSUM pro počet neshodných	172
8.7 Diagramy CUSUM pro řídké jevy	175
Literatura	175
<b>9. Diagramy EWMA</b>	<b>178</b>
9.1 Základní charakteristika diagramu EWMA	178
9.2 Diagram EWMA pro regulaci střední hodnoty procesu	179
9.2.1 Vlastnosti diagramu EWMA	182
9.2.2 Navrhování optimálního diagramu EWMA	183
9.2.3 FIR EWMA	187
9.2.4 Kombinované schéma Shewhart – EWMA	188
9.3 Postupy při nesplnění předpokladů o datech	188
9.3.1 Nesplnění normality dat	188
9.3.2 Autokorelace dat	188
9.3.3 Vliv chyb při odhadech parametrů	189
9.4 EWMA pro variabilitu	190
9.5 EWMA pro počet neshod	190
Literatura	192

<b>10. Diagramy pro vysoce způsobilé procesy (atributivní znaky)</b> .....	<b>195</b>
10.1 Diagram CCC .....	196
10.1.1 Popis diagramu .....	196
10.1.2 Vlastnosti diagramu CCC .....	199
10.1.3 Konstrukce diagramu CCC .....	201
10.2 Diagram CCC-r .....	202
10.2.1 Popis diagramu .....	203
10.2.2 Vlastnosti diagramu CCC-r .....	205
10.2.3 Konstrukce diagramu .....	205
10.3 Diagram CCC-CUSUM .....	206
10.3.1 Popis diagramu .....	206
10.3.2 Vlastnosti diagramu CCC-CUSUM .....	208
10.3.3 Konstrukce diagramu .....	209
10.4 Diagram CCC-EWMA .....	210
10.4.1 Popis diagramu .....	210
10.4.2 Vlastnosti diagramu CCC-EWMA .....	212
10.4.3 Konstrukce diagramu CCC-EWMA .....	213
10.5 Diagram CCC-r EWMA .....	214
10.6 Diagram CQC .....	216
Literatura .....	219
<b>11. Regulační diagramy pro vícerozměrná pozorování</b> .....	<b>222</b>
11.1 Odhad charakteristik vícerozměrného rozdělení .....	223
11.1.1 Výběr podskupin .....	223
11.1.2 Individuální pozorování .....	224
11.2 Hotellingův diagram $T^2$ .....	224
11.2.1 Popis diagramu pro podskupiny .....	225
11.2.2 Interpretace regulačního diagramu .....	227
11.2.3 Popis diagramu pro individuální pozorování .....	230
11.3 Diagram pro monitorování variability .....	234
11.4 Vícerozměrné diagramy CUSUM .....	236
11.4.1 Simultánní schéma CUSUM .....	236
11.4.2 Vícerozměrný diagram CUSUM (MCUSUM) .....	238
11.5 Vícerozměrný diagram EWMA (MEWMA) .....	239
11.5.1 Popis diagramu .....	239
11.5.2 Vlastnosti diagramu MEWMA .....	240
11.5.3 Volba parametrů .....	240
Literatura .....	243
<b>12. Analýza způsobilosti a výkonnosti procesu</b> .....	<b>246</b>
12.1 Přípustná a přirozená variabilita .....	248
12.2 Podíl neshodných .....	248
12.3 Ukazatele způsobilosti pro normální rozdělení .....	249
12.3.1 Ukazatel způsobilosti $C_p$ .....	249
12.3.2 Ukazatele $C_{pkU}$ , $C_{pkL}$ .....	251
12.3.3 Ukazatel $C_{pk}$ .....	252



12.3.4	Odhad ukazatelů způsobilosti	253
12.3.5	Ukazatele obsahující cílovou hodnotu	255
12.4	Ukazatele způsobilosti pro jiná rozdělení	257
12.4.1	Kvantilová metoda	257
12.4.2	Neparametrické metody	259
12.4.3	Transformace	260
12.4.4	Metoda založená na podílu neshodných	261
12.5	Ukazatele výkonnosti procesu	264
12.5.1	Ukazatele pro normální rozdělení	264
12.5.2	Výkonnost procesů typu C	265
12.6	Ukazatele způsobilosti pro krátké série	270
12.6.1	Transformace původních pozorování	270
12.6.2	Konstrukce konfidenčních mezí	271
12.7	Způsobilost procesu s autokorelací	272
12.7.1	Využití výběrové autokorelační funkce	273
12.7.2	Využití modelu časové řady	275
12.8	Vícerozměrné ukazatele způsobilosti	276
12.8.1	Aritmetický průměr jednorozměrných ukazatelů	277
12.8.2	Využití hlavních komponent	278
12.9	Postup při analýze způsobilosti	280
12.9.1	Krátkodobá způsobilost, způsobilost stroje	280
12.9.2	Předběžná způsobilost	281
12.9.3	Dlouhodobá způsobilost	282
	Literatura	282
	<b>Summary</b>	<b>286</b>
	<b>Rejstřík</b>	<b>287</b>



## O autorkách

### **Doc. Ing. Eva Jarošová, CSc.**

Eva Jarošová je absolventkou Fakulty elektrotechnické ČVUT, kde v oboru technická kybernetika získala též titul kandidáta věd. Původně pracovala ve Výzkumném ústavu pro stavbu strojů v Běchovicích v oddělení pro spolehlivost energetických zařízení, v letech 1991–2012 působila na Katedře statistiky a pravděpodobnosti na Fakultě informatiky a statistiky Vysoké školy ekonomické. V roce 2004 byla jmenována docentkou pro obor statistika. V současné době učí ve ŠKODA AUTO Vysoké škole. Je místopředsedkyní odborné skupiny pro statistické metody České společnosti pro jakost a členkou komise TNK 4 Úřadu pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví. Její zájmy se soustředí do oblasti statistických metod řízení jakosti, speciálně statistické regulace procesu a navrhování experimentů. Je autorkou dvou publikací věnovaných navrhování experimentů a spoluautorkou dvou knih o statistických metodách.



### **Prof. Ing. Darja Noskievičová, CSc.**

Po absolvování doktorského studia v letech 1984–1985 pracovala jako programátorka odboru nákupu v n. p. NHKG Ostrava-Kunčice. Od roku 1993 působí na Katedře managementu kvality (dříve kontroly a řízení jakosti) na FMMI VŠB-TU Ostrava, kde vyučuje předměty zaměřené na aplikaci statistických metod v managementu kvality a na management procesů. Aktivně spolupracuje s podnikovou sférou, zejména ve formě výuky v rámci postgraduálních a specializačních kurzů. V letech 1994–2011 působila jako členka Akreditovaného certifikačního místa Domu techniky Ostrava. Dlouhodobě se aktivně zapojuje do práce ČSJ – v posledních letech zejména jako členka odborné skupiny pro statistické metody. Je členkou TNK 4 při Úřadu pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví Praha. Ve své pedagogické a vědeckovýzkumné práci se zaměřuje na aplikace statistických metod v oblasti řízení kvality, především na problematiku komplexního přístupu ke statistické regulaci procesu. Dále se zabývá problematikou moderních manažerských přístupů (Six Sigma, Lean, Agile). Je spoluautorkou pěti monografií.



# Úvod

## Cíl publikace

Publikace realizuje záměr prezentovat současný stav poznání v oblasti aplikačně přínosných statistických metod řízení kvality, konkrétně v části týkající se statistické regulace procesu (*statistical process control* – SPC) a analýzy jeho způsobilosti, resp. výkonnosti. Monografie je zaměřena na postupy, které umožňují účinnou regulaci procesu v nových podmínkách výroby a nahrazují tak z různých důvodů nevyhovující klasické Shewhartovy diagramy. Ucelený přehled těchto metod v publikované odborné literatuře dosud chyběl.

Cílem publikace je přiblížit různé metody SPC a navazující způsoby výpočtu ukazatelů hodnotících způsobilost nebo výkonnost procesu s důrazem na předpoklady jejich aplikace. Kromě výkladu vlastních metod jsou proto zahrnuty i metody ověřování těchto předpokladů a praktické aspekty SPC. Zařazené metody SPC představují klasický statistický přístup a jsou v praxi realizovatelné pomocí běžného statistického softwaru.

## Stručně k tématu

Statistická regulace procesu se v průmyslové praxi uplatňuje poměrně často. Regulační diagramy představují jednoduchý a účinný prostředek, jak porozumět sledovanému procesu. Od roku 1924, kdy W. Shewhart z americké firmy Bell Telephone Laboratories sestrojil první regulační diagram a ukázal, že sledováním chování procesu prostřednictvím malých vzorků odebíraných v průběhu výroby lze předejít vzniku problémů s kvalitou, se však v průmyslové výrobě mnohé změnilo a stále častěji se setkáváme s případy, kdy aplikace klasických Shewhartových diagramů účinná není.

Jedním z důvodů je automatizované měření a následné vyhodnocování individuálních hodnot, při němž se může více projevit vliv odchýlení od předpokladů, z nichž Shewhartův diagram vychází. V podmínkách agilní výroby, pro kterou je typické velké množství různých produktů vyráběných v malých výrobních sériích, brání aplikaci klasického postupu nedostatečný počet měření. Problémy nastávají také u procesů s vysokou hodnotou ukazatele způsobilosti. Překročení regulačních mezí Shewhartova diagramu není v těchto případech možno automaticky považovat za signál k hledání zvláštní příčiny, protože další odstraňování příčin se po dosažení daného stupně kvality jeví jako neekonomické.

Právě v souvislosti se zvyšující se způsobilostí procesů se mění chápání statisticky zvládnutého procesu nebo tzv. procesu pod kontrolou. Za vyhovující se považuje nejen proces, jehož charakteristiky polohy a variability jsou v čase konstantní, ale připouští se i určité kolísání těchto charakteristik v průběhu času. U vysoce způsobilých procesů se sledovaným atributivním znakem se z důvodu řídkého výskytu neshodných jednotek nebo neshod přechází na sledování jiného znaku, než je počet nebo podíl neshodných jednotek či počet neshod.

Po Shewhartových diagramech a v padesátých letech navržených diagramech CUSUM a EWMA vznikla řada dalších diagramů, např. diagramy založené na modelování okamžiku změny. Kromě metod využívajících klasický statistický přístup existují metody založené na bayesovském přístupu nebo na fuzzy přístupu.

V posledních letech se stalo běžným hodnocení způsobilosti či výkonnosti procesu prostřednictvím různých ukazatelů. Protože hodnocení způsobilosti souvisí se statistickou regulací procesu, objevila se i v této oblasti řada nových způsobů výpočtu ukazatelů způsobilosti, resp. výkonnosti.

Na českém knižním trhu dosud chyběla publikace, která by poskytla rozsáhlejší přehled nejrůznějších regulačních diagramů. Cílem autorek bylo napsat knihu, která by posloužila nejen pracovníkům z oblasti řízení kvality a seznámila je s různými modifikacemi či alternativami klasických regulačních diagramů a jejich aplikací, ale která by současně umožnila odborné veřejnosti detailnější pohled na danou problematiku. Pozornost je věnována především alternativám Shewhartových diagramů; předpokládá se, že čtenář je s různými typy Shewhartových diagramů již seznámen. Byly sem zařazeny metody, které jsou v praxi skutečně použitelné a které jsou buď již implementovány ve známých statistických softwarových produktech, nebo jsou realizovatelné pomocí dostupného statistického softwaru.

Aby nebyla narušena plynulost výkladu, jsou matematická odvození v knize omezena na minimum, v některých případech jsou dokonce uvedena jen v příloze na webu. Ze stejného důvodu jsou odkazy na další související práce často umístěny ve formě poznámek na konci oddílů či kapitol. S ohledem na použití v praxi jsou v knize nejen popisovány metody konstrukce jednotlivých diagramů, ale pozornost je věnována i často opomíjeným praktickým problémům implementace SPC, protože správný způsob získání dat podmiňuje úspěšnou aplikaci regulačních diagramů. Pro pracovníky z praxe nebo i pro vysokoškolské studenty může být užitečné zařazení metod ověřování různých předpokladů, jež jsou pro účinnou aplikaci nezbytné. Detailní popis těchto metod přesahuje rámec knihy, navíc se ve většině případů předpokládá využití statistického softwaru. Podstatná je především aplikace uvedených metod a interpretace výsledků; ta je zde ilustrována na mnoha příkladech. Zařazením kapitol o ověřování předpokladů a o praktických aspektech SPC se kniha liší od známých zahraničních publikací.

## Struktura publikace

První tři kapitoly představují obecný základ SPC. V kapitole 1 je vysvětlena podstata statistické regulace procesu a jsou popsány základní charakteristiky klasického regulačního diagramu, jako je riziko falešného a chybějícího signálu nebo průměrný počet přeběhů do výskytu signálu.

Kapitola 2 uvádí metody ověřování předpokladů při navrhování regulačních diagramů a také přehled procesů z hlediska jejich chování v průběhu času. Kapitola 3 je věnována praktickým aspektům, jako jsou způsob vytváření logických podskupin a volba rozsahu a frekvence výběrů. Byl sem rovněž zařazen přehled regulačních diagramů, které jsou popisovány v následujících kapitolách, a pro úplnost také rozhodovací strom pro volbu vhodného Shewhartova diagramu, i když těmto diagramům se v knize přímo nevěnujeme.

Další čtyři kapitoly obsahují postupy vhodné v případě nesplnění některého z předpokladů: konstrukci asymetrických regulačních mezí při porušení předpokladu normality

(kapitola 4), diagram s rozšířenými mezemi, modifikovaný, přejímací a regresní regulační diagram pro procesy s proměnlivou střední hodnotou (kapitola 5), diagramy pro krátké výrobní cykly, kdy v jednotlivých cyklech není k dispozici dostatečný počet dat (kapitola 6) a diagramy pro procesy s autokorelací (kapitola 7).

Regulační diagramy CUSUM (kapitola 8) a diagramy EWMA (kapitola 9) představují odlišné přístupy využívající informaci ze všech dosud uskutečněných pozorování, a jsou proto citlivější na menší posuny procesu. Kromě popisu konstrukce diagramu pro regulaci střední hodnoty a některých jeho modifikací jsou uvedeny i diagramy pro kontrolu inherentní variability a diagramy pro atributivní znaky.

Kapitola 10 se zabývá různými diagramy vhodnými pro regulaci procesů s vysokou způsobilostí, tedy procesů, v nichž se neshodné jednotky nebo neshody objevují velmi řídky. Patří sem diagramy Shewhartova typu i diagramy CUSUM nebo EWMA, avšak regulovanou veličinou je vzdálenost mezi sledovanými jevy, vyjádřená buď počtem jednotek zkontrolovaných do výskytu neshodné jednotky, nebo například dobou či množstvím materiálu zkontrolovaného do výskytu neshody.

Kapitola 11 je věnována regulačním diagramům pro vícerozměrná data a podobně jako předcházející kapitola obsahuje jak diagram Shewhartova typu, nazývaný podle zobrazené statistiky Hotellingův diagram, tak vícerozměrné diagramy CUSUM a EWMA.

Se statistickou regulací procesu je spjata analýza způsobilosti (výkonnosti) procesu. V kapitole 12 jsou shrnuty nejpoužívanější ukazatele způsobilosti a způsoby jejich odhadu pro statisticky zvládnuté procesy, způsoby odhadu ukazatelů výkonnosti i různé modifikace přicházející v úvahu při porušení obvyklých předpokladů.

Řada příkladů v knize vychází z reálných výrobních procesů. Při jejich řešení byl ve většině případů využit statistický software Minitab, někdy také Statgraphics. Data k příkladům a vzorce či tabulky doplňující některé oddíly jsou dostupné na webových stránkách:

[http://www.grada.cz/pokrocilejsi-metody-statisticke-regulace-procesu\\_8465/kniha/katalog/?dopln=stahuj](http://www.grada.cz/pokrocilejsi-metody-statisticke-regulace-procesu_8465/kniha/katalog/?dopln=stahuj)

## Metodika

Obsahem knihy jsou metody statistické indukce používané ve statistické regulaci procesu (SPC) a v související analýze způsobilosti procesu. Klasický přístup k SPC jako k pravděpodobně se opakujícímu výběrovému zjišťování spočívá v rozhodování, zda každý nový výběr odpovídá stejnému pravděpodobnostnímu modelu se známými nebo odhadnutými parametry. Zamítnutí testované hypotézy se považuje za důkaz změny v procesu. Hlavní nástroj SPC – regulační diagram – je grafickým znázorněním testu hypotézy o neznámém parametru uvažovaného modelu pravděpodobnostního rozdělení regulované veličiny. Grafické vyjádření je v SPC žádoucí pro svou názornost a srozumitelnost.

V knize se kromě metod vycházejících z předpokladu normálního rozdělení pracuje i s dalšími známými modely, např. s Weibullovým rozdělením, využívají se též Pearsonovy nebo Burrovy křivky a Boxova-Coxova či Johnsonova transformace, z diskrétních rozdělení Poissonovo, binomické, geometrické a negativně binomické rozdělení.

Kromě rozhodování na základě jediného výběru se aplikuje také postup známý z analýzy časových řad jako exponenciální vyrovnávání, v SPC nazývaný diagram EWMA. Odlišný

přístup k identifikaci posunu procesu představuje diagram CUSUM, vycházející z Waldova sekvenčního testu a založený na testu věrohodnostním poměrem.

V knize jsou prezentovány i další metody, které odrážejí změnu v chápání vyhovujícího procesu v souvislosti se zvyšující se způsobilostí procesů. Jde především o uvolnění předpokladu konstantní střední hodnoty regulované veličiny a předpokladu vzájemné nezávislosti pozorování. Kniha obsahuje různé modifikace klasického Shewhartova diagramu, v některých návrzích se využívá i model ANOVA s náhodnými efekty nebo regresní model. Diagramy pro autokorelovaná data vycházejí z modelů ARIMA, používaných v časových řadách.

Pro úplnost byly zařazeny také diagramy pro vícerozměrná pozorování, v nichž se využívá především Hotellingova statistika.

Kromě metod konstrukce regulačních diagramů jsou do knihy zahrnuty též různé testy sloužící k ověření předpokladů používaných metod. Jde o testy normality, náhodnosti, autokorelace, o analýzu rozptylu (ANOVA), testy heteroskedasticity a testy odlehlých pozorování.

Při konstrukci regulačních mezí a při výpočtu ukazatelů způsobilosti či výkonnosti procesu se využívají různé metody odhadu, tedy opět metody statistické indukce, včetně konstrukce konfidenčních intervalů. U některých metod odhadu vícerozměrných ukazatelů se uplatňuje také hřebenová regrese a analýza hlavních komponent.

Po třech úvodních kapitolách zabývajících se terminologií, ověřováním předpokladů metod, způsobem realizace SPC a zásadami, jimiž se řídí volba vhodného regulačního diagramu, následují čtyři kapitoly, které jsou věnovány metodám při nesplněném předpokladu normality, proměnlivé střední hodnotě, nedostatečném rozsahu výběru a autokorelovaných datech. Další tři kapitoly obsahují diagramy, které jsou po dosažení určité úrovně způsobilosti procesu vhodnější než Shewhartův diagram. Předposlední kapitola je věnována vícerozměrným diagramům a poslední kapitola ukazuje výpočet ukazatelů způsobilosti nebo výkonnosti v případě různých typů procesů uvažovaných v předcházejících kapitolách.

Prezentované metody jsou ilustrovány na příkladech. Pro úsporu místa a pro přehlednost jsou v knize uvedeny jen grafické výstupy a nejdůležitější výsledky spolu s komentářem. Datové soubory a některé výpočty jsou uloženy v příloze na webu, takže čtenář má možnost si postupy a výsledky ověřit. K řešení byl ve většině případů využit statistický software Minitab nebo Statgraphics.

Pro zajištění plynulosti výkladu jsou matematická odvození omezena na minimum a čtenář je odkázán na další zdroje, případně na doplňující vzorce v příloze na webu. Různé podrobnější komentáře a odkazy na další modifikace metod jsou ze stejného důvodu umístěny formou poznámek na konci příslušných oddílů.

Na konci každé kapitoly se nachází rozsáhlý, abecedně řazený seznam literatury včetně norem, na něž se v textu odkazuje.

Kniha vznikla s přispěním interní grantové agentury ŠKODA AUTO Vysoké školy, o. p. s., v rámci projektu číslo IGA 2012/9 Pokročilé metody statistické kontroly procesu.

# 1. Podstata statistické regulace procesu

Principy statistické regulace procesu (dále SPC) zformuloval ve dvacátých letech minulého století W. A. Shewhart (Shewhart, 1931), který také poprvé prakticky aplikoval diagramy známé jako klasické Shewhartovy regulační diagramy.

Podstatou SPC je bezprostřední, pravidelná a průběžná výběrová kontrola kvality procesů založená na matematicko-statistickém hodnocení kvality. Dává podněty k operativním zásahům do procesu a umožňuje tak okamžitě zlepšit proces, a dokonce předejít nevyhovující kvalitě.

Cíli SPC jsou:

- předcházení jak přeregulování procesu, tak jeho nedostatečné regulaci;
- dosažení stavu, kdy je proces statisticky stabilní (zvládnutý);
- udržování procesu na požadované a stabilní úrovni (tj. ve statisticky zvládnutém stavu);
- předcházení neshodným produktům;
- diferencování mezi náhodnými a zvláštními příčinami variability procesu;
- co nejrychlejší zásah do procesu v případě působení zvláštních příčin;
- vytvoření podmínek pro hodnocení způsobilosti procesu;
- vytvoření podmínek pro další zlepšování procesu;
- dokumentování řízení procesu pro zákazníka;
- vytvoření podmínek pro omezení klasického způsobu kontroly (např. vstupní kontroly u odběratele).

Teorie SPC vychází z existence variability jako imanentní vlastnosti každého procesu, která způsobuje nedostatek jeho opakovatelnosti. I za relativně stálých podmínek působí na proces a jeho výstupy objektivně řada vlivů, které způsobují, že nelze vyprodukovat dva zcela totožné produkty. Je však potřebné tyto vlivy studovat a vytvářet podmínky pro snižování variability procesu a jeho zlepšování. Snižování variability procesu pak znamená stejnoměrnější výrobu, menší pravděpodobnost výskytu neshodných produktů, menší rozsah kontroly a nižší náklady na kontrolu a zkoušení, nižší náklady vyvolané poruchami procesu, produkováním odpadu a jednotek vyžadujících přepracování a konečně také více spokojených zákazníků. Omezí-li se variabilita vstupů do procesu a sníží-li se variabilita průběhu vlastního procesu, povede to k omezení variability vlastností produktů jako výstupů z procesu.

Princip SPC vychází z členění variability na dva druhy: na variabilitu vyvolanou náhodnými (přírozenými) příčinami a variabilitu vyvolanou příčinami zvláštními (neobvyklými, identifikovatelnými, vymežitelnými):



1. **Náhodné příčiny** vytvářejí široký komplex jednotlivě neidentifikovatelných příčin, z nichž každá sama o sobě přispívá k celkové variabilitě malou měrou. Vyvolávají-li variabilitu procesu pouze tyto příčiny, lze ho charakterizovat následovně:

- proces je opakovatelný a kvalita jeho výstupů je předvídatelná;
- proces je ve statisticky zvládnutém (stabilním) stavu. Znamená to, že typ a parametry rozdělení pravděpodobnosti znaku kvality či parametru procesu, s jehož pomocí hodnotíme variabilitu procesu, jsou známy a nemění se (obrázek 1.1a).

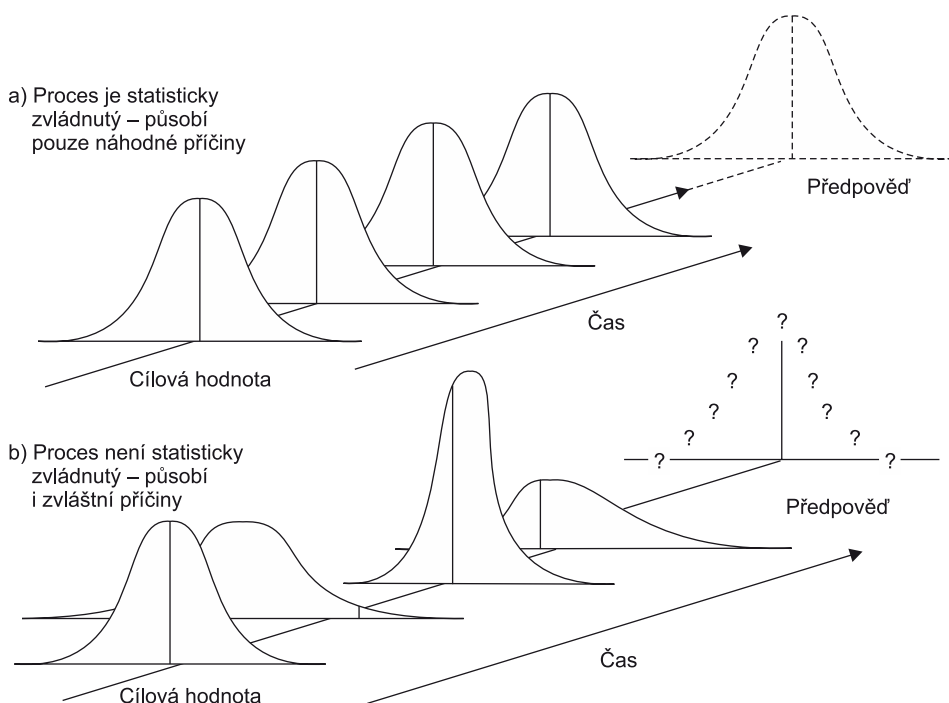
Jako příklady náhodných příčin můžeme uvést chvění stroje, vlhkost ovzduší, nestejnorodost materiálu, kolísání teploty chladicí kapaliny, nestejnoměrnost otáčení obrobku. Odstranění vlivu těchto příčin vyžaduje systémové opatření, které je většinou v kompetenci managementu a bývá časově i finančně náročné (změna technologie, nákup nového stroje apod.).

2. **Zvláštní příčiny** představují vliv zdrojů variability, které za běžných podmínek na proces nepůsobí. Vyvolávají reálné změny procesu projevující se v nepřírozeném kolísání údajů, s jejichž pomocí variabilitu procesu hodnotíme.

Působí-li na proces také tyto příčiny, lze jej popsat takto:

- proces není reprodukovatelný a kvalita jeho výstupů není předvídatelná;
- proces není statisticky zvládnutý (stabilní). To znamená, že typ a parametry rozdělení znaku kvality či parametru procesu, s jehož pomocí hodnotíme variabilitu procesu, se v čase mění (obrázek 1.1b).

Odstranění vlivu těchto příčin vyžaduje obvykle pouze lokální zásah osoby přímo zodpovědné za provádění činnosti v rámci daného procesu.



**Obr. 1.1** Náhodné a zvláštní příčiny variability

Zvláštní příčiny variability procesu se dále člení na příčiny sporadické a příčiny přetrvávající. Příčiny sporadické vznikají náhle, vyvolávají změny procesu trvající krátkou dobu. Pak se ztrácejí a opět se mohou vyskytnout v budoucnu. Změny procesu vyvolané těmito příčinami bývají větší. Přetrvávající příčiny vyvolávají určitou dobu trvající odchylky v parametrech rozdělení regulované veličiny (znaku kvality či technologického parametru), s jejíž pomocí sledujeme a hodnotíme chování procesu. Jako příklady zvláštních příčin můžeme uvést: poškození nástroje, změnu seřízení stroje či nástroje, změnu materiálu, nezaškolenou obsluhu stroje apod.

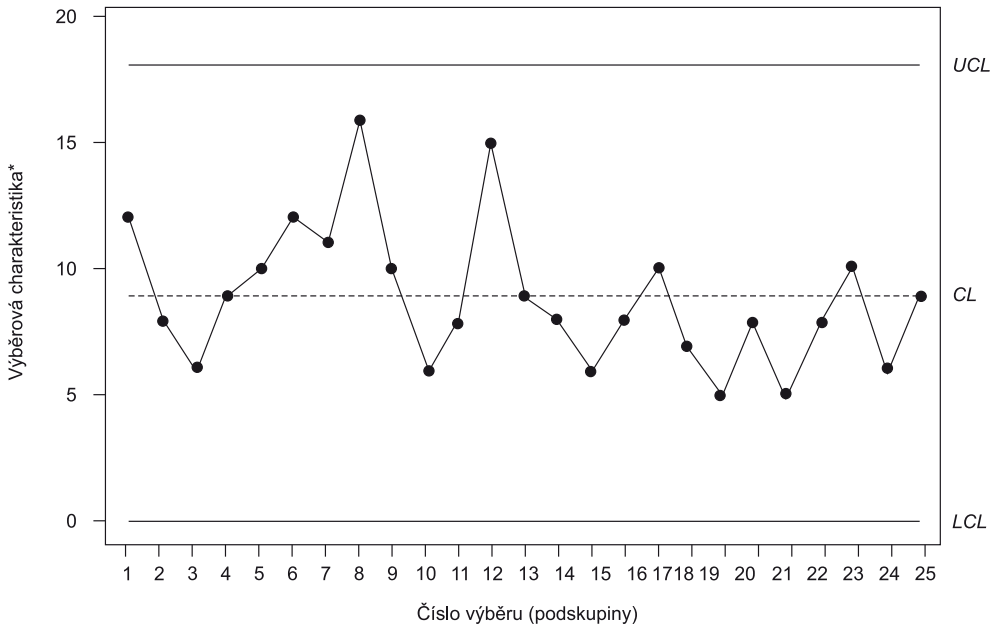
Chceme-li realizovat neustálé zlepšování procesu, pak je nutné permanentně monitorovat chování procesu s cílem dosáhnout a udržovat statisticky zvládnutý stav cestou zjišťování a odstraňování či alespoň částečné eliminace působení zvláštních příčin. Chování procesu a kvalita jeho výstupů jsou pak předvídatelné a je možné objektivně hodnotit schopnost plnit očekávání zákazníka a dále snižovat přirozenou variabilitu procesu vyvolávanou působením náhodných příčin.

## 1.1 Základní charakteristika klasického regulačního diagramu

Hlavním nástrojem SPC je regulační diagram. Jeho princip a struktura budou vysvětleny v tomto oddílu na regulačním diagramu Shewhartova typu (blíže viz kapitola 3), u kterého se předpokládá nezávislost měřených veličin, jejich normální rozdělení s parametry  $\mu$  a  $\sigma$ . Kromě toho se předpokládá, že zvláštní (vymezitelná) příčina nastává v jediném okamžiku a okamžitě vyvolává posun sledované charakteristiky. Případům, kdy jsou tyto předpoklady porušeny, jsou věnovány další kapitoly. Základní struktura regulačního diagramu je patrná z obrázku 1.2.

Regulační diagram je grafický prostředek zobrazení vývoje variability procesu v čase, využívající principů testování statistických hypotéz. Představuje zobrazení zvolené testové statistiky jako funkce času. Na ose  $x$  se vynášejí pořadová čísla časových okamžiků realizace jednotlivých výběrů (prakticky jsou tato čísla chápána jako označení pořadí výběrů), které mají charakter logické podskupiny. Logická podskupina je výběr jednotek produktu provedený tak, že uvnitř tohoto výběru má šanci se projevit pouze variabilita vyvolaná náhodnými příčinami. Rozdíly mezi jednotlivými prvky tohoto výběru pak představují míru inherentní variability procesu. Jinými slovy, začne-li působit na proces nějaká zvláštní příčina, je šance na projev jejího vlivu uvnitř podskupiny minimální, a naopak, mezi podskupinami je maximální. Způsob tvorby výběrů určuje vlastnosti regulačního diagramu, neboť ovlivňuje odhad inherentní variability procesu, který je základem pro stanovení regulačních mezí – kritérií pro posuzování, zda proces je, či není statisticky zvládnutý. Nerespektování konceptu logické podskupiny může vést k významnému nadhodnocení nebo podhodnocení této inherentní variability; regulační meze pak mohou být příliš široké nebo příliš úzké a regulační diagram nemůže plnit svůj účel.

Na ose  $y$  je pak stupnice pro hodnoty zvolené testové statistiky (výběrového průměru, výběrové směrodatné odchylky, počtu neshod v podskupině...). Hlavní funkcí efektivního využití regulačních diagramů je poskytnout statistický signál, když začne působit zvláštní příčina, a vyhnout se falešnému signálu, když k žádné významné změně v procesu nedošlo.



\* Výběrová charakteristika použitá jako testová statistika v daném regulačním diagramu

### Obr. 1.2 Základní struktura regulačního diagramu

Rozhodnutí o tom, zda proces je nebo není statisticky zvládnutý, umožňují tři základní kritéria: centrální přímkou  $CL$ , dolní regulační mez  $LCL$  a horní regulační mez  $UCL$ .  $CL$  odpovídá tzv. referenční (požadované) hodnotě použité znázorňované charakteristiky. Referenční hodnota může být definována několika způsoby:

- jako odhad z hodnot regulované veličiny získaných v podmínkách statisticky zvládnutého procesu (tento způsob se používá ve druhé etapě SPC – viz oddíl 3.1 –, kdy většinou parametry rozdělení sledované veličiny nejsou známy);
- jako nominální hodnota (např. jmenovitá hodnota nebo hodnota daná technickým předpisem); tento způsob je vhodný v případě, kdy proces lze jednoduše seřadit na tuto hodnotu;
- jako hodnota založená na minulých zkušenostech s daným výrobním procesem (tento způsob je vhodný ve čtvrté etapě SPC (viz oddíl 3.1).

Regulační meze  $UCL$  a  $LCL$  se nazývají také akční meze. Vymezují pásmo působení pouze náhodných příčin variability a jsou základním rozhodovacím kritériem, zda učinit zásah do procesu, či nikoliv. Regulační meze jsou stanoveny statisticky, nelze je zaměňovat s tolerančními mezemi. V klasických Shewhartových regulačních diagramech jsou tyto meze většinou stanoveny ve vzdálenosti  $3\sigma$  (směrodatná odchylka) dané výběrové charakteristiky na obě strany od centrální přímkou (dále v textu budou takové meze obecně označovány jako  $3\sigma$  meze). Ve druhé etapě SPC (viz oddíl 3.1), kdy většinou parametry rozdělení sledované veličiny nejsou známy, se tato směrodatná odchylka odhaduje z variability uvnitř podskupin (viz vzorce v příloze na webu). Ve čtvrté etapě

SPC (viz oddíl 3.1) již lze považovat směrodatnou odchylku za známou, a není ji proto většinou nutné odhadovat z minulých naměřených hodnot.

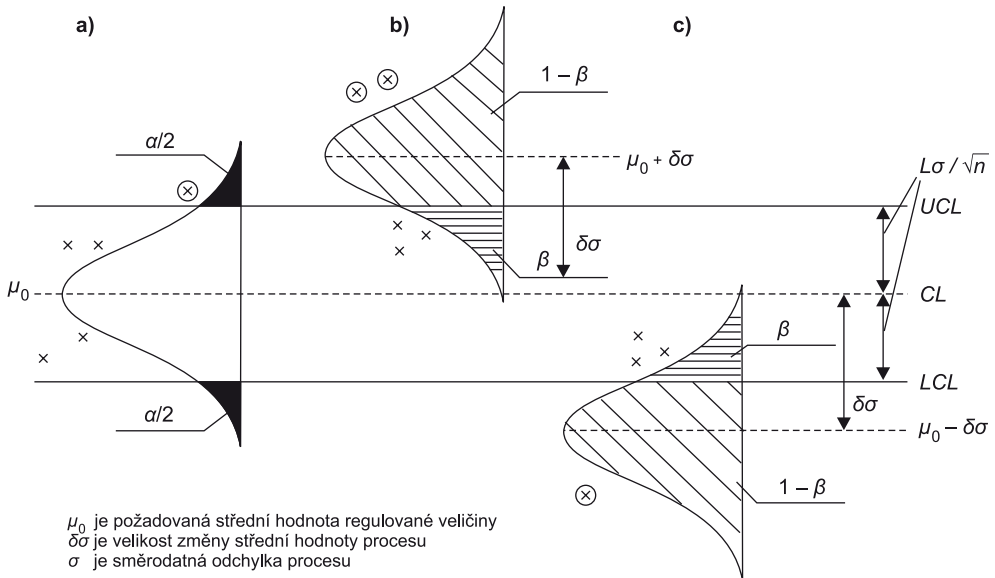
V některých aplikacích se zakreslují do regulačního diagramu další meze nazývané výstražné: *UWL* – horní výstražná mez a *LWL* – dolní výstražná mez. Pásmo, které vymezují tyto meze, je vždy užší než pásmo mezi akčními mezemi, nejčastěji  $\pm 2\sigma$  dané výběrové charakteristiky od *CL*.

## 1.2 Riziko falešného a chybějícího signálu

Statistickou regulaci procesu lze chápat jako opakované (sekvenční) testování statistické hypotézy. Toto pojetí SPC umožňuje posoudit, resp. porovnat účinnost regulačních diagramů. Pro regulovanou veličinu, tj. sledovaný znak kvality nebo technologický parametr jako náhodnou veličinu, se zformuluje hypotéza o hodnotách parametrů jejího pravděpodobnostního rozdělení. Tato nulová hypotéza by měla být sestavena tak, aby při její platnosti proces splňoval požadavky na kvalitu, tj. aby byl hodnocen jako proces ve statisticky zvládnutém stavu. Nulová hypotéza se pak opakovaně testuje na základě pravidelně opakovaných výběrů. Zamítnutí nulové hypotézy (body vně regulačních mezí, trendy či jiná nenáhodná seskupení) je signálem o tom, že proces vybočil z předpokládaného vyhovujícího stavu (tj. není ve statisticky zvládnutém stavu) a je nutný regulační zásah do procesu. Regulačním zásahem rozumíme proces identifikace a částečné či úplné eliminace působení zvláštní příčiny, která vyvolala signalizovanou nežádoucí změnu chování procesu.

SPC je spojeno se dvěma druhy rizik: rizikem chyby prvního druhu  $\alpha$ , nazývaným rizikem falešného signálu (někdy označovaným také jako riziko zbytečného signálu), což je pravděpodobnost zbytečného vyhledávání zvláštní příčiny na základě signálu z regulačního diagramu o tom, že proces není ve statisticky zvládnutém stavu (např. bod mimo akční meze), i když ve skutečnosti k žádné významné změně procesu nedošlo. S tímto nesprávným závěrem jsou spojeny náklady na pokus najít příčinu neexistujícího problému. Pravděpodobnost chyby druhého druhu  $\beta$  se v SPC nazývá riziko chybějícího signálu a je to pravděpodobnost, že regulační diagram neodhalí změnu procesu určité velikosti včas (všechny body dané testové statistiky leží uvnitř akčních mezí ani netvoří žádné nenáhodné seskupení). S tímto nesprávným závěrem jsou zase spojeny náklady vyvolané tím, že se do procesu včas nezasáhlo. Hodnota  $(1 - \beta)$ , tj. hodnota silofunkce testu, zde vyjadřuje pravděpodobnost detekce změny procesu, která má být včas odhalena.

Na obrázku 1.3 jsou zachycena rizika  $\alpha$  a  $\beta$  ve vazbě na regulační diagram pro výběrové průměry. Při aplikaci tohoto diagramu se vlastně testuje nulová hypotéza  $H_0: \mu = \mu_0$  oproti alternativní hypotéze  $H_1: \mu \neq \mu_0$ , kde  $\mu_0$  je cílová (požadovaná) úroveň střední hodnoty procesu odpovídající statisticky zvládnutému procesu. V grafu 1.3a je zobrazeno riziko falešného signálu  $\alpha$ , tj. pravděpodobnost, s jakou regulační diagram vydá signál o změně střední hodnoty procesu, i když ve skutečnosti proces zůstává centrován na  $\mu_0$ . V grafu 1.3b a 1.3c jsou zobrazeny situace pro posun střední hodnoty procesu z  $\mu_0$  na  $\mu = \mu_0 + \delta\sigma$ , resp. z  $\mu_0$  na  $\mu = \mu_0 - \delta\sigma$ . Na tento posun je vázána hodnota rizika chybějícího signálu  $\beta$ .



**Obr. 1.3** Riziko falešného signálu  $\alpha$  a riziko chybějícího signálu  $\beta$

Velikost změny střední hodnoty procesu lze vyjádřit také ve tvaru normované diference

$$\delta = \frac{|\mu_0 - \delta\sigma - \mu_0|}{\sigma} \quad (1.1)$$

V dalších odstavcích bude ukázán postup stanovení rizika  $\alpha$  a  $\beta$  pro klasický Shewhartův regulační diagram pro výběrové průměry.

### 1.2.1 Výpočet rizika $\alpha$ pro regulační diagram Shewhartova typu pro průměry

Obecně riziko stanovujeme tak, abychom s co nejmenší četností zamítali hypotézu  $H_0$  (tj. aby regulační diagram co nejméně signalizoval, že proces není v ustáleném a požadovaném stavu, i když ve skutečnosti v něm je). Za předpokladu normálního rozdělení výběrové charakteristiky, se kterou daný regulační diagram pracuje, lze riziko falešného signálu určit dle vzorce

$$\alpha = 1 - [\Phi(L) - \Phi(-L)] \quad (1.2)$$

Pro klasický Shewhartův regulační diagram s 3sigma mezemi ( $L = 3$ ) je  $\alpha = 1 - 0,9973 = 0,0027$ . Chceme-li zvýšit citlivost klasického regulačního diagramu na odchylky parametru procesu, je možné toho dosáhnout zúžením pásma mezi regulačními mezemi, a to zmenšením hodnoty  $L$ , například na hodnotu 2. Pak  $\alpha = 1 - 0,9545 = 0,0455$ . To zname-