

MATURITNÍ OTÁZKY



matematika

souhrn učiva
testy a cvičení
rady k maturitě

Eva Řídká
Dana Blahunková
Petr Chára

 FRAGMENT

Maturitní otázky – Matematika

také v tištěné verzi

Objednat můžete na
www.fragment.cz.



Doporučujeme další e-knihy v edici:
Maturitní otázky – Český jazyk – e-kniha
Maturitní otázky – Literatura – e-kniha
Maturitní otázky – Angličtina – e-kniha
Maturitní otázky – Dějepis – e-kniha

Eva Řídká, Dana Blahunková, Petr Chára
Maturitní otázky – Matematika – e-kniha
Copyright © Fragment, 2011

Všechna práva vyhrazena.
Žádná část této publikace nesmí být rozšiřována
bez písemného souhlasu majitelů práv.

OBSAH

1	VÝROKY A VÝROKOVÁ LOGIKA	9
1.1	Výrok a negace	9
1.2	Složené výroky, logické spojky	10
1.3	Negace složených výroků	11
1.4	Kvantifikované výroky, kvantifikátory	11
1.5	Implikace, obměna, obrácená implikace	13
1.6	Axiomy, definice, věty, důkazy	15
1.7	Důkaz matematickou indukcí	17
2	ABSOLUTNÍ HODNOTA, ROVNICE A NEROVNICE.	22
2.1	Absolutní hodnota, geometrická interpretace	22
2.2	Graf lineární funkce s absolutní hodnotou	24
2.3	Rovnice s absolutní hodnotou	26
2.4	Nerovnice s absolutní hodnotou	26
3	MOCNINY A ODMOCNINY, ROVNICE S NEZNÁMOU POD ODMOCNINOU.	31
3.1	Mocnina, odmocnina	31
3.2	Částečné odmocnění, usměrnění zlomku.	34
3.3	Iracionální rovnice a nerovnice.	34
4	ROVNICE A NEROVNICE S PARAMETREM	39
4.1	Parametr	39
4.2	Lineární rovnice.	40
4.3	Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou	41
4.4	Kvadratické rovnice	42
5	FUNKCE A JEJÍ VLASTNOSTI	46
5.1	Funkce	46
5.2	Graf funkce	48
5.3	Vlastnosti funkcí.	48
5.3.1	Definiční obor, obor hodnot	48
5.3.2	Spojitosť	49
5.3.3	Parita funkcí.	49
5.3.4	Monotonie, funkce periodická	50
5.3.5	Omezenost a extrémy	52
5.3.6	Funkce konvexní a konkávní	53
5.3.7	Funkce prostá, inverzní funkce	54
5.4	Transformace grafu funkce	55
5.4.1	Posunutí grafu funkce	55

5.4.2	„Deformace“ grafu funkce	56
5.4.3	Absolutní hodnota v předpisu funkce	57
6	LINEÁRNÍ FUNKCE, ROVNICE A JEJICH SOUSTAVY, NEROVNICE	60
6.1	Lineární funkce	60
6.2	Grafické řešení rovnic a nerovnic	62
6.3	Rovnice, nerovnice, soustavy	63
7	LINEÁRNÍ LOMENÁ A MOCNINNÁ FUNKCE, ROVNICE	68
7.1	Lineární lomená funkce	68
7.2	Mocninné funkce	69
7.3	Grafy lineárních lomených funkcí	70
7.4	Grafy lineárních lomených funkcí s absolutní hodnotou.	71
7.5	Grafy mocninných funkcí	72
7.6	Rovnice	73
8	KVADRATICKÉ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE	76
8.1	Kvadratická rovnice, kvadratický trojčlen	76
8.2	Soustavy rovnic	79
8.3	Kvadratická nerovnice	80
8.4	Kvadratická funkce, graf kvadratické funkce	81
9	EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE	89
9.1	Exponenciální funkce	89
9.2	Grafy exponenciálních funkcí a jejich vlastnosti.	90
9.3	Exponenciální rovnice	92
9.3.1	Exponenciální rovnice se dvěma členy	92
9.3.2	Exponenciální rovnice s více členy	94
9.3.3	Substituce v exponenciálních rovnicích	94
9.4	Exponenciální nerovnice	95
10	LOGARITMICKÉ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE	100
10.1	Logaritmus	100
10.2	Grafy logaritmických funkcí a jejich vlastnosti	101
10.3	Logaritmické rovnice a nerovnice	102
10.3.1	Rovnice využívající definici logaritmu a základních vlastností logaritmu	102
10.3.2	Věty o logaritmech a jejich užití v logaritmických rovnicích	104
10.3.3	Substituce v logaritmických rovnicích	107
10.3.4	Logaritmické nerovnice	107
11	GONIOMETRICKÉ FUNKCE A ROVNICE.	112
11.1	Definice goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku	112
11.2	Definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici	114
11.3	Goniometrické rovnice řešené na jednotkové kružnici	116

11.4	Grafy goniometrických funkcí	117
11.5	Úpravy výrazů a řešení rovnic pomocí goniometrických vzorců	119
11.6	Substituce v goniometrických rovnicích	121
12	TRIGONOMETRIE, APLIKACE V PRAXI	125
12.1	Pravoúhlý trojúhelník	125
12.1.1	Pythagorova věta, Euklidovy věty	125
12.1.2	Užití goniometrických funkcí.	127
12.2	Obecný trojúhelník, sinová a kosinová věta.	130
12.2.1	Užití kosinové věty	130
12.2.2	Užití sinové věty.	130
13	DÉLKY A PLOCHY V ROVINNÝCH ÚTVARECH, POČETNÍ GEOMETRIE	135
13.1	Obvody a obsahy	135
13.1.1	Kružnice, kruh, kruhová výseč, kruhová úseč, mezikruží	135
13.1.2	Trojúhelník, čtyřúhelník, mnohoúhelník	136
13.2	Úhly	139
14	KONSTRUKČNÍ ÚLOHY	142
14.1	Množiny bodů	142
14.2	Trojúhelníky	143
14.3	Mnohoúhelníky a kružnice.	145
15	SHODNOSTI A PODOBNOSTI	149
15.1	Zobrazení v rovině	149
15.2	Shodná zobrazení	150
15.2.1	Osová souměrnost	151
15.2.2	Středová souměrnost	152
15.2.3	Posunutí	153
15.2.4	Otočení	154
15.3	Podobná zobrazení, stejnolehlost	155
15.3.1	Podobnost trojúhelníků	155
15.3.2	Stejnolehlost	156
16	VEKTORY A JEJICH UŽITÍ	160
17	ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ	168
17.1	Přímka a její části	168
17.2	Rovina	170
17.3	Metrické vztahy	172
17.4	Vzájemná poloha přímek a rovin.	175
18	ANALYTICKÁ GEOMETRIE KVADRATICKÝCH ÚTVARŮ	181
18.1	Kuželosečky.	181
18.2	Tečny ke kuželosečkám	187

19	MNOHOSTĚNY A ROTAČNÍ TĚLESA.	192
19.1	Mnohostěny	192
19.2	Rotační tělesa	195
20	ŘEZY TĚLES, METRICKÉ VZTAHY V TĚLESECH	200
20.1	Zobrazování těles	200
20.2	Řezy	200
20.2.1	Řez krychle rovinou	201
20.2.2	Řez jehlanu rovinou	202
20.3	Průsečík přímky s rovinou	203
20.4	Průsečnice rovin v krychli	205
20.5	Odchyly přímek a rovin, vzdálenosti	206
20.5.1	Kolmost.	206
20.5.2	Metrické vztahy	207
21	KOMPLEXNÍ ČÍSLA.	212
21.1	Zobrazení komplexních čísel, operace, rovnice	213
21.1.1	Algebraický tvar.	213
21.1.2	Goniometrický tvar	216
21.2	Kvadratické, binomické a reciproké rovnice.	218
22	POSLOUPNOSTI A ŘADY.	224
22.1	Definice posloupnosti	224
22.2	Vlastnosti posloupností	225
22.3	Limita posloupnosti	226
22.4	Věty o limitách posloupnosti.	228
22.5	Aritmetická posloupnost	230
22.6	Geometrická posloupnost	231
22.7	Úlohy řešené pomocí aritmetické nebo geometrické posloupnosti	232
22.8	Nekonečná geometrická řada	234
23	KOMBINATORIKA A PRAVDĚPODOBNOST, STATISTIKA	239
23.1	Kombinatorika	239
23.1.1	Faktoriál, kombinační čísla	239
23.1.2	Základní kombinatorická pravidla	241
23.1.3	Variace, permutace, kombinace	242
23.1.4	Binomická věta	244
23.2	Pravděpodobnost	245
23.2.1	Definice pravděpodobnosti	245
23.2.2	Nezávislé jevy	247
23.2.3	Podmíněná pravděpodobnost	249
23.2.4	Binomické rozdělení pravděpodobností - Bernoulliovo schéma	251
23.3	Statistika	253

24	DERIVACE, PRŮBĚH FUNKCE	259
24.1	Limita.	259
24.1.1	Definice limity funkce	259
24.1.2	Výpočet limity.	261
24.2	Derivace	262
24.2.1	Definice derivace, věty o derivaci, výpočty	262
24.3	Průběh funkce	265
24.3.1	Monotonie, lokální extrémy, konvexní a konkávní funkce	265
24.3.2	Asymptoty grafů funkcí	268
24.4	L'Hospitalovo pravidlo.	269
24.5	Užití derivací při určování extrému ve slovních úlohách.	270
25	INTEGRÁL FUNKCE A JEHO APLIKACE	276
25.1	Primitivní funkce, neurčitý integrál.	276
25.2	Metoda substituce a per partes pro výpočty neurčitých integrálů	278
25.3	Určitý integrál, výpočet obsahu plochy a objemu rotačních těles	279

ÚVOD

Vážení čtenáři,

kniha, kterou otevíráte, je určena středoškolákům, začínajícím vysokoškolákům, učitelům hledajícím inspiraci i zvědavým zájemcům, ale zejména maturantům. Obsahuje ucelený souhrn středoškolské matematiky rozčleněný do 25 maturitních témat. Každá kapitola začíná motivační úlohou, na níž si můžete ověřit své současné vědomosti. Postupně se seznámíte s teoretickými základy a prostřednictvím řešených úloh, jednodušších i složitějších, si proklastíte cestu k samostatnému řešení problémů. Společně s upevňováním a prohlubováním vašich znalostí se posílí také dovednost rozumět matematickým textům. Čas strávený učením vám zpříjemní rozmanitost úloh, běžných i nezvyklých, modelových i z praxe.

Jednotlivé kapitoly poskytují možnost doplnit si učivo, které je v některých školách chápáno jako rozšířené učivo. Čtenář je pomalu seznamován s tématem, každý další krok je podrobně popsán a následně použit v řešení. Průvodcem vám může být i množství názorných obrázků či utřídění některých důležitých pravidel v tabulkách.

Každý si může najít svůj způsob přípravy. Zdatní studenti by úlohy měli řešit zcela samostatně, jednotlivé kapitoly obsahují i problémy pro náročné. Naopak méně pokročilým jsou k dispozici podrobná řešení všech úloh, včetně rozličných upozornění. Každý nový pojem matematické teorie je doložen ukázkou a následně procvičován. Není nutné vyřešit úlohy na první pokus a ani není potřeba pochopit všechno beze zbytku. Své sebevědomí si mnohem lépe upevníte, zaměříte-li se nejprve na problémy, které jsou pro vás jednodušší, nebo na témata, která vás zajímají. Úspěchu docílíte zejména tím, že samostatně vyřešíte úlohy, jež jste zpočátku dokázali pochopit jen díky nápovědě.

Rozmanitost úloh od typicky školských až po praktické ukázky, rozdílnost forem jejich zadání, různá obtížnost a obsahová šíře od jednoduchých ke komplexním odpovídají požadavkům dnešní i připravované státní maturitní zkoušky. V úlohách jsou zastoupena všechna témata obsažená v Katalogu požadavků k maturitní zkoušce uvedeného na stránkách Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání MŠMT.

Všem čtenářům přejeme příjemnou a především užitečnou procházku Maturitními otázkami.

Autoři

1 Výroky a výroková logika

Řešíš s kamarádem problém přípravy na maturitu z matematiky. Konstatuješ: „Koupím-li si tuto sbírku a budu-li pilně studovat, pak maturitu z matematiky zvládnu.“ Kamarád odpoví: „No, já si myslím, že když si ji koupíš a nezvládneš maturitu, pak jsi pilně nestudoval.“ Na to kontruješ: „Ty přece říkáš to samé, co jsem řekl já.“

Říkáte skutečně totéž?

Řešení:

Zapiš symbolicky jednoduché výroky:

K : Koupím sbírku. S : Pilně studuji. Z : Zvládnu maturitu.

S použitím logických spojek zapiš oba složené výroky:

$(K \wedge S) \Rightarrow Z$: Koupím-li si tuto sbírku a budu-li pilně studovat, maturitu z matematiky zvládnu.

$(K \wedge \neg Z) \Rightarrow \neg S$: Když si ji koupíš a nezvládneš maturitu, pak jsi pilně nestudoval.

Zapiš tabulku pravdivostních hodnot:

K	S	Z	$\neg S$	$\neg Z$	$K \wedge S$	$K \wedge \neg Z$	$(K \wedge S) \Rightarrow Z$	$(K \wedge \neg Z) \Rightarrow \neg S$
1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	1

Z posledních dvou sloupců vyplývá, že oba říkáte skutečně totéž. (Složené výroky jsou ekvivalentní.)

1.1 Výrok a negace

Výrok je každá oznamovací věta, která nabývá právě jedné ze dvou pravdivostních hodnot: pravdy, je-li věta pravdivá (označení symbolem 1), anebo nepravdy, je-li věta nepravdivá (označení symbolem 0). Výrokové proměnné se značí velkými písmeny (A – Z).

Negací výroku A je výrok $\neg A$ s opačnou pravdivostní hodnotou, který se vytvoří z původního výroku A spojením „není pravda, že A “, případně jinou větou téhož významu.

Úloha 1

Zapište libovolný pravdivý a nepravdivý výrok a vytvořte negaci:

Řešení:

A	$\neg A$	Výrok	Negace výroku
1	0	Číslo 2 je nejmenší prvočíslo.	Nejmenším prvočíslem není číslo 2.
0	1	Praha je hlavní město Číny.	Praha není hlavním městem Číny.

Úloha 2

Vytvořte různá vyjádření negace následujícího výroku a určete jeho pravdivostní hodnotu:

Číslo 9 je sudé.

Řešení:

Není pravda, že číslo 9 je sudé. Neplatí tvrzení, že číslo 9 je sudé. Číslo 9 není sudé. Číslo 9 je liché. Číslo 9 není násobkem čísla 2. Pro negaci je možné najít ještě další vyjádření. V této úloze má negace výroku pravdivostní hodnotu 1, původní výrok má pravdivostní hodnotu 0.

Úloha 3

Které z následujících vět jsou výroky? U výroků určete pravdivostní hodnotu.

- Pro $x \in \mathbf{R}$ platí, že $2x - 5 = 1$.
- Existuje $x \in \mathbf{N}$, pro něž je $2x - 5 = 1$.
- Pro $x = 3$ platí $2x - 5 = 1$.
- Existuje záporný kořen rovnice $2x - 5 = 1$.
- Ke každému parametru a z oboru přirozených čísel existuje právě jedno přirozené číslo x , které je řešením rovnice $x^4 - a(x^3 + x^2 + x + 1) - 1 = 0$.

Řešení:

- K uvedenému sdělení se nepodaří přiřadit jednu pravdivostní hodnotu. Pro $x = 3$ je tvrzení pravdivé, pro jiné hodnoty proměnné x je nepravdivé. Věta není výrokem.
- , c), d) Všechna tři uvedená tvrzení jsou výroky. Pravdivostní hodnoty jsou postupně 1, 1, 0.
- Může se stát, že nevyřešíš uvedenou rovnici, a nedokážeš určit pravdivostní hodnotu tvrzení. Přesto můžeš dokázat, že tvrzení nabývá jediné pravdivostní hodnoty, a je tedy výrokem. Zkus posoudit pravdivostní hodnoty všech možností. Pokud by k některé hodnotě parametru a neexistovalo žádné řešení rovnice nebo by k některé hodnotě parametru a existovala alespoň dvě různá řešení, tvrzení by bylo nepravdivé. V opačném případě by se ke každé hodnotě parametru a našlo jediné řešení, pak by tvrzení bylo pravdivé. Obě tyto situace se vzájemně vylučují (první možnost je negací druhé) a jiná situace již nastat nemůže. Jedná se tedy skutečně o výrok. Pokud chceš zjistit odpověď na pravdivostní hodnotu výroku, můžeš nejprve zkusit za a dosadit hodnotu 1, resp. 2, a ukázat, že k vybrané hodnotě existuje jediný kořen z oboru $\mathbf{N}$ ($x = 2$, resp. 3).

Důkaz pravdivosti tvrzení e) provedeš obecně. Rozložíš výraz $x^4 - 1$, vytkeš čtyřčlen $x^3 + x^2 + x + 1$ a získáš jeden kořenový činitel $x - (a + 1)$, tedy i první kořen $x = (a + 1)$. Nulová hodnota druhého činitele $x^3 + x^2 + x + 1$ již nevede k žádnému dalšímu kladnému řešení. Pravdivostní hodnota výroku je 1.

1.2 Složené výroky, logické spojky

Spojením jednoduchých výroků logickými spojkami vzniknou složené výroky.

Konjunkce: $A \wedge B$, což čteme „ A a B “ či „ A a současně B “ či „ A i B “.

Konjunkce je pravdivá jen v případě, kdy jsou oba výroky pravdivé.

Disjunkce: $A \vee B$, což čteme „ A nebo B “. Pozor! Spojka „nebo“ nemá význam vylučovací.

Disjunkce je nepravdivá jen v případě, kdy jsou oba výroky nepravdivé.

Implikace: $A \Rightarrow B$, což čteme z „ A vyplývá B “ či „jestliže A , pak B “.

Implikace je nepravdivá jen v případě, že předpoklad A je pravdivý, ale tvrzení B je nepravdivé.

Ekvivalence: $A \Leftrightarrow B$, což čteme „ A , právě když B “ či „ A tehdy a jen tehdy, když B “.

Ekvivalence je pravdivá, mají-li oba výroky stejnou pravdivostní hodnotu.

Pravdivostní hodnoty složených výroků jsou tedy závislé na pravdivostních hodnotách jednoduchých výroků, což je uvedeno v tabulce:

Jednoduché výroky		Konjunkce $A \wedge B$	Disjunkce $A \vee B$	Implikace $A \Rightarrow B$	Ekvivalence $A \Leftrightarrow B$
A	B				
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

1.3 Negace složených výroků

Složený výrok		Negace
Konjunce	$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$
Disjunce	$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
Implikace	$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
Ekvivalence	$A \Leftrightarrow B$ nebo $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow \neg B$ nebo $\neg A \Leftrightarrow B$ nebo $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Úloha 4

Je dáno 5 jednoduchých výroků:

A : Přejde Adam.

B : Přejde Bohuslav.

C : Přejde Cyril.

D : Přejde Dana.

E : Přejde Eva.

Pomocí symbolů A – E vytvořte zápisy následujících složených výroků:

Výrok	Řešení	Jiný způsob vyjádření
a) Nepřejde Adam nebo Bohuslav.	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B)$
b) Přejde právě jedna dívka.	$D \Leftrightarrow \neg E$	$(D \Rightarrow \neg E) \wedge (\neg D \Rightarrow E)$
c) Přejde alespoň jeden chlapec.	$A \vee B \vee C$	
d) Přejde-li Dana, nepřejde ani Adam ani Cyril.	$D \Rightarrow (\neg A \wedge \neg C)$	$D \Rightarrow \neg(A \vee C)$

Úloha 5

Vyslovte negace výroků a) až d) z příkladu 4. Nejprve uveďte symbolický zápis negace.

Řešení:

a) $(A \wedge B)$	Přejde Adam i Bohuslav.
b) $D \Leftrightarrow E$	Nepřejde žádná z dívek, anebo přijdou obě. Dana přejde právě tehdy, když přejde Eva.
c) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$	Nepřejde nikdo z chlapců. Nepřejde Adam ani Bohuslav a ani Cyril.
d) $D \wedge (A \vee C)$ $(D \wedge A) \vee (D \wedge C)$	Přejde Dana a alespoň jeden z obou chlapců, Adam nebo Cyril. Dana přejde buď s Adamem, nebo s Cyrilem.

Pro některé výroky jsou v tabulce uvedeny různé možnosti.

1.4 Kvantifikované výroky, kvantifikátory

Výroky, které udávají počet, se nazývají kvantifikované výroky.

Obecný kvantifikátor: $\forall$, který se čte „každý“ či „pro všechna“ či „libovolný“, v záporné větě se čte „žádný“ či „nikdo“. Obecný kvantifikátor přiřazuje popisovanou vlastnost všem objektům.

Existenční kvantifikátor: $\exists$, který se čte „existuje“ či „alespoň pro jeden“. Existenční kvantifikátor vyjadřuje existenci alespoň jednoho objektu s popisovanou vlastností.

Úloha 6

Přečtěte a vysvětlete následující výroky:

- a) $\forall x \in \mathbf{R}; |x| \geq 0$
- b) $\exists m \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}; m \leq n$
- c) $\forall n \in \mathbf{Z} \exists m \in \mathbf{Z}; m < n$

Řešení:

- a) Absolutní hodnotou libovolného reálného čísla je číslo nezáporné. (Vlastnost se týká všech reálných čísel.)
- b) Existuje přirozené číslo m , které je ze všech přirozených čísel nejmenší. (Stále stejné přirozené číslo m se porovnává se všemi přirozenými čísly n .)
- c) Mezi celými čísly je možné k libovolnému z nich najít ještě menší. (Ke každému celému číslu n je možné najít jiné celé číslo m .)

Zatímco výrok b) říká, že v množině přirozených čísel existuje minimum, ve výroku c) se tvrdí, že v množině celých čísel minimum neexistuje.

Při **negaci kvantifikovaných výroků** se obecný kvantifikátor mění na existenční a opačně.

Negace některých kvantifikátorů:

$\forall$	$\exists$
$\exists$	$\forall$
alespoň n prvků je ... (pro $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$)	méně než n prvků je ..., nejvýše $n - 1$ prvků je ...
nejvýše n prvků je ... (pro $n \in \mathbf{N}$)	více než n prvků je ..., nejméně $n + 1$ prvků je ..., alespoň $n + 1$ prvků je ...
někteří jsou ..., alespoň jeden je ...	žádní nejsou ..., nikdo není ...
všichni jsou ...	někteří nejsou ..., alespoň jeden není ...
právě n prvků je ... (pro $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$)	méně než n prvků nebo více než n prvků je ...
právě jeden prvek je ...	žádný prvek není nebo alespoň dva prvky jsou ...

Úloha 7

Vytvořte negace výroků z příkladu 6.

Řešení:

- a) $\exists x \in \mathbf{R}; |x| < 0$
- b) $\forall m \in \mathbf{N} \exists n \in \mathbf{N}; m > n$
- c) $\exists n \in \mathbf{Z} \forall m \in \mathbf{Z}; m \geq n$

Úloha 8

Negujte následující výroky:

Řešení:

a) Půjdu nejvýše na 2 filmy.	Půjdu alespoň na 3 filmy. (více než na 2)
b) Zpozdil se nejméně o 5 minut.	Pokud se zpozdil, pak méně než o 5 minut.
c) Žádný poslanec nehlasoval proti.	Alespoň jeden poslanec hlasoval proti.
d) V konvexním pětiúhelníku mají libovolné dvě úhlopříčky společný bod.	V konvexním pětiúhelníku je alespoň jedna dvojice úhlopříček, které nemají společný bod.
e) Nikdy nikomu neprozradí všechno.	Někdy někomu všechno prozradí.
f) Každý problém ho zaskočí.	Některý problém ho nezaskočí.
g) Někteří by sami nevyřešili vůbec nic.	Každý by sám něco vyřešil.

1.5 Implikace, obměna, obrácená implikace

Úloha 9

Porovnej v tabulce pravdivostní hodnoty složených výroků $A \Rightarrow B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$ a $\neg A \vee B$, dále je porovnej s výroky $B \Rightarrow A$ a $A \Leftrightarrow B$.

Řešení:

Jednoduché výroky				Implikace $A \Rightarrow B$	Obměna implikace $\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg A \vee B$	Obrácená implikace $B \Rightarrow A$	Ekvivalence $A \Leftrightarrow B$
A	B	$\neg A$	$\neg B$					
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1

Implikace $A \Rightarrow B$ má **stejnou pravdivostní hodnotu** jako **obměna implikace** $\neg B \Rightarrow \neg A$. Je-li složený výrok uvozen kvantifikátory, při obměně implikace se kvantifikátory nezmění (na rozdíl od negace).

Obrácená implikace k výroku $A \Rightarrow B$ je výrok $B \Rightarrow A$. Pravdivostní hodnotu obrácené implikace nelze z původní implikace předvídat. Pokud je implikace i obrácená implikace pravdivá, jsou oba jednoduché výroky dokonce ekvivalentní.

Složený výrok, který je vždy pravdivý, a to nezávisle na pravdivostních hodnotách jednoduchých výroků z nichž je složen, se nazývá **tautologie**.

Příklady tautologií:

$$(A \Rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow \neg A)$$

$$(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$$

$$A \vee \neg A$$

Úloha 10

Vytvořte obměny implikací, obrácené implikace a negace. U úlohy b) a c) označte pravdivostní hodnotu symboly 1, 0:

- Jestli nespí, pak sní.
- Má-li rovnoběžník kolmé úhlopříčky, má i shodné strany.
- Shodují-li se libovolné trojúhelníky alespoň v jedné straně a příslušné výšce, mají stejný obsah.

Řešení:

Obměna implikace:

- Jestli nesní, pak spí.
- Nemá-li rovnoběžník shodné strany, nemá ani kolmé úhlopříčky. (1)
- Mají-li libovolné trojúhelníky odlišný obsah, pak se neshodují v žádné dvojici – strana s příslušnou výškou. (1)

Obrácená implikace:

- Jestli sní, pak nespí.
- Má-li rovnoběžník shodné strany, má i kolmé úhlopříčky. (1)
- Mají-li libovolné trojúhelníky stejný obsah, pak se shodují alespoň v jedné straně a příslušné výšce. (0)

Negace:

- Nespí a nesní.
- Rovnoběžník má kolmé úhlopříčky a nemá shodné strany. (0)
- Existují trojúhelníky s různým obsahem, které se shodují alespoň v jedné straně a příslušné výšce. (0)

Pozor! Změna kvantifikátorů u negací!

Poznámka:

Výrok b) je možné vyslovit jako ekvivalenci. Bude pravdivá, neboť implikace i obrácená implikace je pravdivá. Rovnoběžník má kolmé úhlopříčky, právě když má shodné strany.

Úloha 11

Která z následujících ekvivalencí je pravdivá?

- a) $\forall x \in \mathbf{R}; x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$
- b) $\forall n \in \mathbf{Z}; 4 \mid n \Leftrightarrow 4 \mid n^2$

Řešení:

Při důkazových úlohách s ekvivalencí se posuzují pravdivostní hodnoty implikace a obrácené implikace.

- a) Oba složené výroky $\forall x \in \mathbf{R}; x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$, $\forall x \in \mathbf{R}; |x| = x \Rightarrow x \geq 0$ (implikace a obrácená implikace) jsou pravdivé, proto je pravdivá ekvivalence $\forall x \in \mathbf{R}; x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$.
- b) Výrok $\forall n \in \mathbf{Z}; 4 \mid n \Rightarrow 4 \mid n^2$ je pravdivý, ale obrácená implikace $\forall n \in \mathbf{Z}; 4 \mid n^2 \Rightarrow 4 \mid n$ je nepravdivá (např. $4 \mid 36$, ale $4 \nmid 6$). Proto je ekvivalence $\forall n \in \mathbf{Z}; 4 \mid n \Leftrightarrow 4 \mid n^2$ nepravdivá. K důkazu obrácené implikace užij obměny: $\forall n \in \mathbf{Z}; 4 \nmid n \Rightarrow 4 \nmid n^2$ (nepřímý důkaz - viz dále).

Úloha 12

Které z následujících výroků jsou vzájemně ekvivalentní?

- a) Výrok $A : \forall x \in \mathbf{R}; x > 1 \Rightarrow x^2 > x$
- b) Výrok $B : \forall x \in \mathbf{R}; x^2 \leq x \Rightarrow x \leq 1$
- c) Výrok $C : \forall x \in \mathbf{R}; x^2 > x \Rightarrow x > 1$
- d) Výrok $D : \exists x \in \mathbf{R}; x > 1 \wedge x^2 \leq x$
- e) Výrok $E : \forall x \in \mathbf{R}; x \leq 1 \vee x^2 > x$
- f) Výrok $F : \forall x \in \mathbf{R}; x^2 \leq x \vee x > 1$

Řešení:

Výrok B je obměnou výroku A , proto jsou oba výroky A, B vzájemně ekvivalentní.

Výroky A a C obsahují obrácené implikace. Výroky nejsou ekvivalentní.

Výrok D je negací výroků A i B , proto má opačnou pravdivostní hodnotu než tyto výroky.

Výrok E je negací výroku D , vznikl tedy dvojnásobným negováním výroku A či B , proto je s oběma těmito výroky vzájemně ekvivalentní.

Výrok F vznikl dvojnásobným negováním výroku C . Proto jsou C a F ekvivalentní výroky.

Všechny tři vzájemně ekvivalentní výroky A, B, E mají tutéž pravdivostní hodnotu, jsou pravdivé. Ekvivalentní výroky C a F jsou nepravdivé a výrok D je rovněž nepravdivý.

Úloha 13

Předpokládejme, že ponožky v prádelním koši rozlišujeme na světlé a tmavé, bavlněné a silonové, dívčí a chlapecké a také tlusté a tenké.

1. Víme, že v prvním koši jsou všechny tlusté ponožky tmavé. Vyplývá z toho, že
 - a) tam musí být nějaké tenké světlé ponožky?
 - b) pokud je v koši tmavá ponožka, je tlustá?
 - c) pokud jsou v koši jen tlusté ponožky, musí být všechny ponožky v koši tmavé?
 - d) pokud je v koši nějaká dívčí světlá ponožka, pak je současně tenká?
2. Víme, že ve druhém koši nejsou žádné tlusté chlapecké ponožky ani silonové ponožky, ale všechny ponožky jsou dívčí nebo světlé. Vylučuje se to s tím, že
 - e) je tam nějaká světlá chlapecká ponožka?
 - f) je tam nějaká dívčí světlá tenká ponožka?
 - g) je tam nějaká chlapecká tmavá ponožka?
 - h) je tam nějaká tmavá chlapecká bavlněná ponožka?

Řešení:

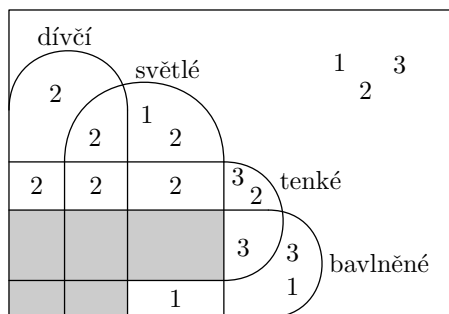
1. a) NE. (Nepředpokládá se existence žádných dalších ponožek v koši.)
 b) NE. (Platí jen obrácená implikace.)
 c) ANO. (Jsou-li tlusté, jsou tmavé.)
 d) ANO. (Platí obměna implikace – není-li ponožka tmavá, není ani tlustá.)

2. Pro řešení další části úlohy můžeš využít následující tabulky:

Ponožky		světlé		tmavé	
		bavlněné	silonové	bavlněné	silonové
tlusté	dívčí		2		2
	chlapecké	1	1, 2	1, 3	1, 2, 3
tenké	dívčí	f)	2		2
	chlapecké	e)	2	3	2, 3

Tabulka znázorňuje situaci ve druhém koši, bílá jsou pole s ponožkami, které v koši určitě nebudou. (Jsou to tlusté chlapecké ponožky (1), silonové ponožky (2) a tmavé chlapecké ponožky (3), neboť nejsou světlé a ani dívčí).

- e) NE. (Zbylo vybarvené pole se světlými chlapeckými ponožkami.)
- f) NE.
- g) ANO. (Zbyla jen bílá pole.)
- h) ANO.



K řešení příkladu 13 je možné použít i **Vennových diagramů** pro znázornění čtyř množin, které představují čtyři charakteristiky (uživatel, odstín, síla, materiál), kde u každé charakteristiky existují dvě možnosti. (Uživatel je dívka či chlapec, odstín je světlý či tmavý apod.) Každá množina představuje jednu možnost u vybrané charakteristiky (např. uživatel je dívka), druhou možnost (uživatel je chlapec) představuje doplněk této množiny. Bílé jsou ty množiny ponožek, které se ve druhém koši nemohou vyskytovat.

1.6 Axiomy, definice, věty, důkazy

Axiom je tvrzení, které se nedokazuje, předpokládá se, že je pravdivé. Axiomy jsou základními kameny každé matematické teorie. (Axiomem je např. tvrzení Eukleidovské geometrie: Libovolným bodem, který leží mimo danou přímku, můžeme vést právě jednu rovnoběžku s touto přímkou.)

Definici se zavádí nový pojem. (Příklad: Říkáme, že přirozené číslo je prvočíslo, když má v oboru přirozených čísel právě dva různé dělitele – číslo jedna a samo sebe.)

Matematická věta je takový pravdivý výrok (matematická teorie), jehož pravdivost můžeme dokázat prostřednictvím axiomů a vět již dříve dokázaných. (Příklad: V každém kosočtverci jsou úhlopříčky na sebe kolmé.)

Důkazem se vyvozuje pravdivostní hodnota (dokazovaného) tvrzení.

Vyjmenujme čtyři základní typy důkazů: **přímý a nepřímý důkaz, důkaz sporem a důkaz matematickou indukcí.**

V přímém důkazu se z uvedených předpokladů dospěje k dokazovanému tvrzení prostřednictvím pravdivých (dříve dokázaných nebo z axiomů platných) implikací.

Důkaz sporem začíná předpokladem negace dokazovaného výroku. Při vyvozování z této negace se dospěje k nějakému tvrzení, které je nepravdivé, případně je v logickém sporu s předpokladem. Je tak dokázána nepravdivost negace dokazovaného výroku. Pravdivý je původní výrok.