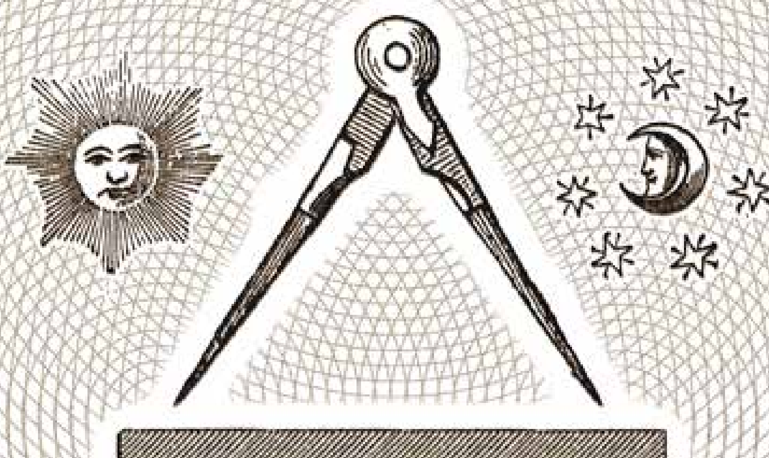
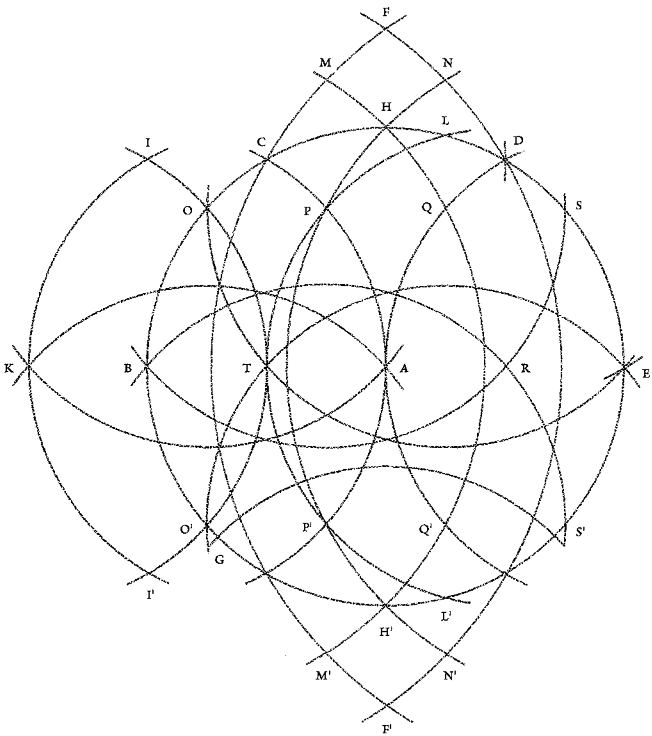
PRAVÍTKO A KRUŽÍTKO

PRAKTICKÉ GEOMETRICKÉ KONSTRUKCE



Andrew Sutton



$AT = \sqrt{1}$	$AM = \sqrt{6}$	$PS' = \sqrt{11}$	$BE = \sqrt{16}$	$I'D = \sqrt{21}$
$PT = \sqrt{2}$	$QQ' = \sqrt{7}$	$BD = \sqrt{12}$	$FK = \sqrt{17}$	$KS = \sqrt{22}$
$DR = \sqrt{3}$	$AF = \sqrt{8}$	$HK = \sqrt{13}$	$KN = \sqrt{18}$	$MM' = \sqrt{23}$
$AB = \sqrt{4}$	$BR = \sqrt{9}$	$BS = \sqrt{14}$	$KD = \sqrt{19}$	$MN' = \sqrt{24}$
$HT = \sqrt{5}$	$BL = \sqrt{10}$	$LL' = \sqrt{15}$	$FG = \sqrt{20}$	$KE = \sqrt{25}$

Podle L. Mascheroniho a A. N. Kostovského.

Andrew Sutton: Pravítko a kružítko
Praktické geometrické konstrukce

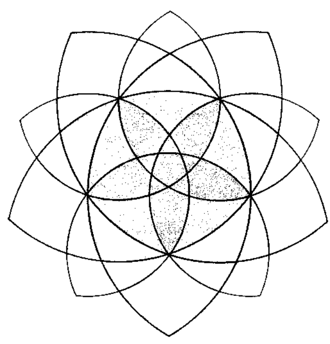
Design and typeset by Wooden Books Ltd, Glastonbury, UK.

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).
Z anglického originálu *Ruler & Compass. Practical Geometric Constructions* přeložil Marek Pečenka.
Odpovědná redaktorka Klára Soukupová.
Sazba a konverze do elektronické verze Michal Puhač.
V roce 2017 vydalo nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, 150 00 Praha 5,
dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 891. publikaci (261. elektronická).

ISBN 978-80-7363-830-6

PRAVÍTKO A KRUŽÍTKO

Praktické geometrické konstrukce



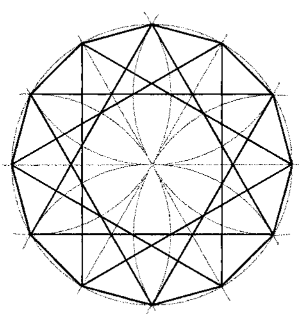
Andrew Sutton

Na památku Johna Michella.

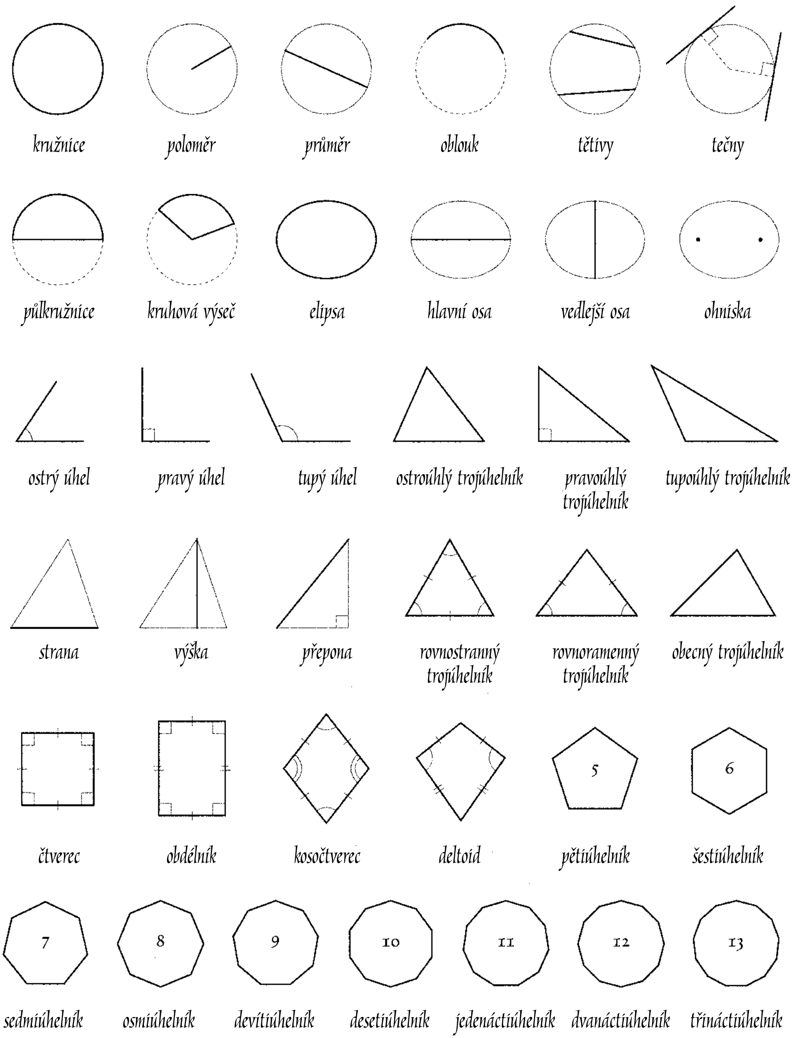
Díky Nikki za to, že se smířila s další knihou.
Díky Robertovi a Burkardovi, že zkontrolovali konstrukce a celý text.
Rovněž díky M. C. Percivalovi, který mě jako první zasvětil do konstrukcí pomocí pravítka a kružítka.
Zvláštní poděkování pak patří těm všem geometrům, jejichž práce jsou obsaženy v této malé knize.

Pro tento knižní výběr byly klíčové následující práce:
J. L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*; Wm. Fitch Cheney, *Can We Outdo Mascheroni?* (článek); Robert Dixon, *Mathographics*; T. W. Good, *Plane & Solid Geometry*; Jay Hambidge, *The Elements of Dynamic Symmetry*; Joseph Harrison & G. A. Baxandall, *Practical Plane & Solid Geometry for Advanced Students*; Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*; T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*; E. W. Hobson, *Squaring the Circle*; Jay Kappraff, *A Secret of Ancient Geometry in Geometry at Work*; A. N. Kostovskij, *Geometrical Constructions Using Compasses Only*; Mark A. Reynolds, *Geometric and Harmonic Means and Progressions* (článek); Paul Rosin, *On Serlio's Construction of Ovals* (článek); A.S. Smogorzhevskij, *The Ruler in Geometrical Constructions*; Henry J. Spooner, *The Elements of Geometrical Drawing*; Dwarka Nath Yajvan & prof. G. Thibout, *Baudhayan Sulbasutram*; webové stránky Jima Loye, obzvláště o trisekci, *www.jimloy.com*; *Forum Geometricorum* (online časopis), *forumgeom.fau.edu*

Není-li zmíněn konkrétní zdroj, pak jde s výjimkou několika málo autorových adaptací a jednoduchých konstrukcí o úlohu standardní a dobře známou.



OBSAH


kružnice
poloměr
průměr
oblouk
tětivy
tečny
půlkružnice
kruhová výseč
elipsa
hlavní osa
vedlejší osa
ohniska
ostrý úhel
pravý úhel
tupý úhel
ostroúhlý trojúhelník
pravoúhlý trojúhelník
tupoúhlý trojúhelník
strana
výška
přepona
rovnostranný trojúhelník
rovnoramenný trojúhelník
obecný trojúhelník
čtverec
obdélník
kosočtverec
deltoid
5
pětiúhelník
6
šestiúhelník
7
8
9
10
11
12
13
sedmiúhelník
osmiúhelník
devítiúhelník
desetiúhelník
jedenáctiúhelník
dvanáctiúhelník
třináctiúhelník

ÚVOD

Umění geometrické konstrukce lze vystopovat v rozšířené praxi, kdy lidé za pomoci kolíků a provazu sestavovali jednoduché tvary a prováděli měření. *Geometrie* doslova znamená země-měření. Staroegyptští „natahovači provazu“ – *harpenodaptai* – přeměřovali hranice pozemků po každoroční nilské záplavě. Prastaré indické metody konstrukce oltářů najdeme zase v *Šulba sútrách*. Později prováděli lidé podobné konstrukce i v menším měřítku. Platón († asi 347 př. n. l.) jako první stanovil striktní podmínku, že může být užito jen pravítka a kružítka, tedy ideálních tvarů přímky a kružnice.

Tato kniha má posloužit jako malý praktický průvodce touto disciplínou, inspirována byla příručkami pro řemeslníky z pera Abu'l Wafy († 998) a Albrechta Dürera († 1528). Text přináší trochu matematického kontextu a historie, ale nikoli důkazy. Avšak pokud není zmíněno jinak, všechny konstrukce jsou matematicky přesné. Doporučuji čtenářům, aby si je sami vyzkoušeli sestrojit – na papíře neexistuje adekvátní náhrada za pravítko a kružítko.

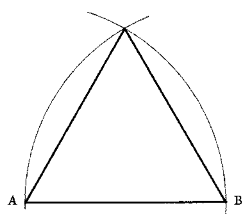
Kniha používá jednoduchý systém. *Přímka AB* znamená: *narýsuj přímku, která prochází body A a B. Úsečka* označuje část přímky mezi dvěma krajními body. *Kružnice O-A* znamená: *narýsuj kružnici se středem v bodě O a procházející bodem A*. *Kružnice o poloměru AB a se středem O* znamená: *Naber kružítkem délku AB a pak narýsuj kružnici se středem v bodě O. Oblouk* se užívá tam, kde místo celé kružnice postačí narýsovat jen její část. Aby se zvětšila přesnost konstrukce, přidává se občas pár bodů navíc, např. *přímka ABC*, *kružnice O-AB*. Nově sestrojené body jsou v závorkách. Jen mimořádně není přímka, již je možné vést novými body, zakreslena a je jen zmíněna. Pro úsporu místa mohou být rovněž jednotlivé fáze konstrukce slučovány. Ale žádný strach. Všechno bude jasné.

ZÁKLADY

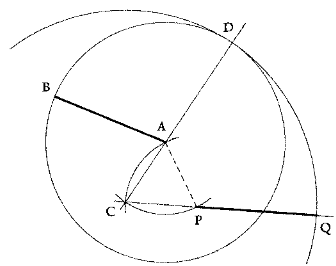
trojúhelníky a kopírování úhlů

Eukleidovy *Základy* (asi 300 př. n. l.) jsou jednou z nejzásadnějších prací, které kdy byly o matematice napsány. Eukleides vychází z jednoduchých axiomů a logicky dokazuje pravdivost vět v geometrii a teorii čísel. Axiomy zahrnují například tvrzení, že je možné spojit dva body úsečkou či sestrojit kružnici se středem v jednom bodě a procházející druhým bodem. Ale Eukleides nikdy neměří vzdálenost mezi dvěma body a nekreslí kružnici o tomto průměru – *kružítko se jakoby složí*, jakmile opustí rovinu.

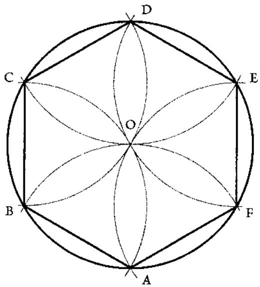
Po první úloze, kterou sestrojí rovnostranný trojúhelník, Eukleides dokáže, že i jednoduché *sklapovací kružítko* může odměřit vzdálenost mezi dvěma body a přenést ji tak, aby mohl sestrojit kružnici se středem kdekoli jinde (úloha 2). Praktické konstrukce, které používají kružítko k přenášení délky přímo, tak proto mohou být stále považovány za eukleidovské – další kroky dle konstrukce 2 se prostě nezakreslí.



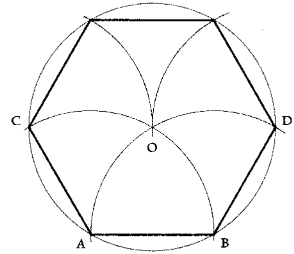
1. Rovnostranný trojúhelník s danou stranou:
1. Oblouk A-B;
2. Oblouk B-A a vzniklý průsečík



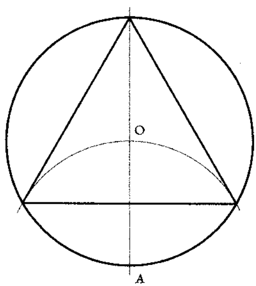
2. Přenesení vzdálenosti AB:
1. Oblouky A-P, P-A (C);
2. Přímky CA, CP;
3. Kružnice A-B (D); oblouk C-D (Q)
PQ = AB



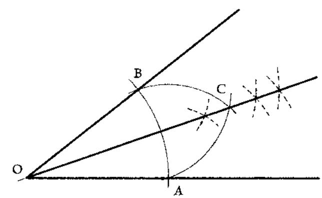
3. *Pravidelný šestiúhelník vepsaný kružnici:*
1. *Oblouk* A-O (B, F); 2. *Oblouk* B-OA (C);
3. *Oblouk* C-OB (D); 4. *Oblouk* D-OC (E);
5. *Oblouk* E-ODF; 6. *Oblouk* F-OEA



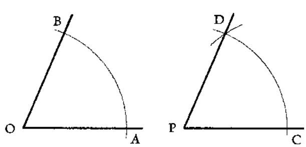
4. *Pravidelný šestiúhelník s danou stranou:*
1. *Oblouky* A-B, B-A (O); 2. *Kružnice* O-AB (C, D);
3. *Oblouky* C-O, D-O *a jejich průsečíky s kružnicí*



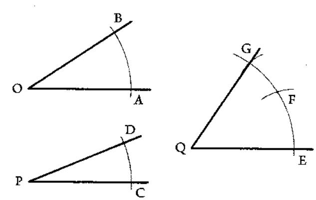
5. *Rovnostranný trojúhelník vepsaný kružnici:*
1. *Přímka vedená středem* O (A);
2. *Oblouk* A-O *a vzniklé průsečíky*



6. *Půlení úhlu (osa úhlu):*
1. *Oblouk se středem* O (A, B); 2. *Oblouky* A-B, B-A (C),
alternativy čárkovaně; 3. *Přímka* OC;
$\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOC = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB$



7. *Přenesení úhlu:*
1. *Oblouk se středem* O (A, B);
2. *Oblouk s poloměrem* OA *a se středem* P (C);
3. *Oblouk s poloměrem* AB *a se středem* C (D);
4. *Přímka* PD; $\sphericalangle CPD = \sphericalangle AOB$



8. *Sčítání úhlů:*
1. *Oblouk se středem* O (A, B);
2. *Oblouk s poloměrem* OA *a se středem* P (C, D);
3. *Oblouk s poloměrem* OA *a se středem* Q (E);
4. *Oblouk s poloměrem* AB *a se středem* E (F);
5. *Oblouk s poloměrem* CD *a se středem* F (G);
6. *Přímka* QG; $\sphericalangle EQG = \sphericalangle AOB + \sphericalangle CPD$

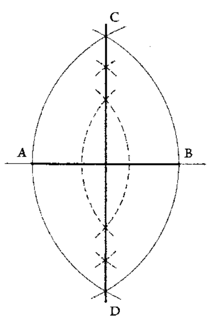
Kolmice

přímo vzhůru

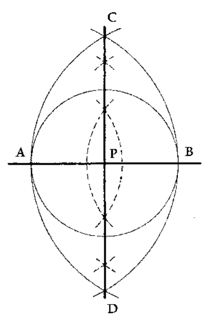
Pravítkem rozumíme v našich úlohách jakoukoli rovnou hranu. Pokud používáte skutečné pravítko, pak byste měli ignorovat stupnici s vyznačenými hodnotami délky. Míru můžete nabrat výhradně z konstrukce samé.

Osa úsečky je přímka kolmá k úsečce a procházející jejím středem (někdy se tato konstrukce používá k nalezení tohoto středu). Všimněte si, že oblouky umožňující sestrojení této osy, nemusí být plné, musí mít jen stejný poloměr a protínat se. Příklady jsou níže vyznačeny čárkovaně (konstrukce 9, 10, 11).

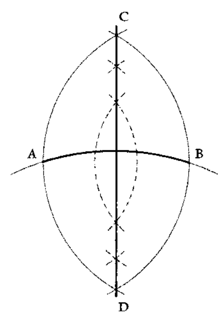
V konstrukci 14 postačí jakékoli oblouky a alternativy jsou rovněž čárkované. Tento postup může být použit dokonce i tehdy, kdy bod leží za koncem úsečky a oba oblouky směřují stejným směrem.



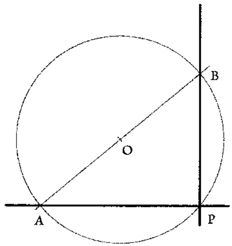
9. Osa úsečky AB:
1. Oblouky se stejnými poloměry a středy A, B (C, D);
2. Přímka CD



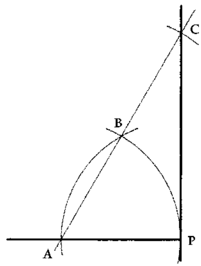
10. Kolmice z bodu P na přímce:
1. Kružnice se středem P (A, B);
2. Oblouky se stejnými poloměry a středy A, B (C, D);
3. Přímka CPD



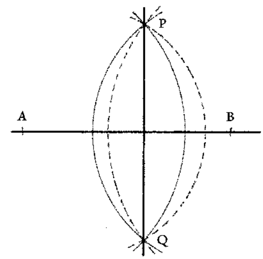
11. Rozpůlení oblouku AB:
1. Oblouky se stejnými poloměry a středy A, B (C, D);
2. Přímka CD



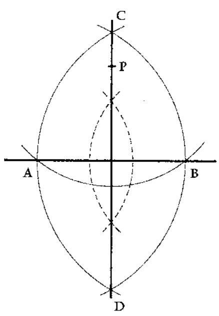
12. Kolmice z bodu P na přímce:
1. Pro jakýkoli bod O mimo přímku kružnice O-P (A);
2. Přímka AO (B);
PB je kolmice k AP



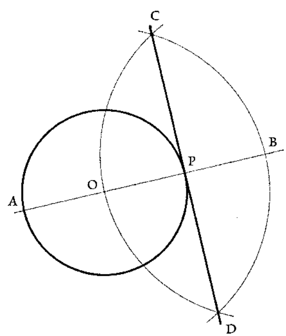
13. Kolmice z počátečního bodu polopřímky:
1. Oblouk jakéhokoli poloměru a se středem P (A);
2. Oblouk A-P (B);
3. Přímka AB;
4. Oblouk B-AP (C);
PC je kolmice k AP



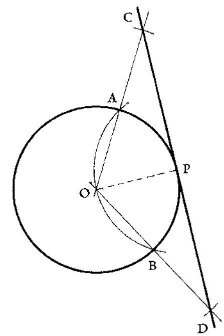
14. Spuštění kolmice z bodu P na přímku:
1. Pro jakýkoli bod A na přímce oblouk A-P;
2. Pro jakýkoli bod B na přímce oblouk B-P (Q);
přímka PQ je kolmá na AB



15. Spuštění komice z bodu P na přímku:
1. Jakýkoli oblouk s přiměřeným poloměrem a středem P (A, B);
2. Oblouky se stejným poloměrem a středy A, B (C, D);
3. Přímka CPD



16. Tečna kružnice:
1. Přímka OP (A);
2. Oblouk o poloměru PA a se středem O (B);
3. Oblouk B-O (přímka CPD);
přímka CPD je tečnou kružnice v bodě P



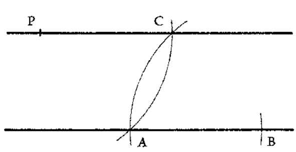
17. Tečna kružnice:
1. Oblouk P-O (A, B);
2. Přímky OA, OB;
3. Oblouky A-O, B-O (CPD);
přímka CPD je tečnou kružnice v bodě P

Rovnoběžky
v jedné rovině

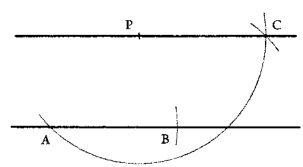
V eukleidovské geometrii směřují přímky do nekonečna oběma směry. Rovnoběžky jsou pak takové přímky, které se ve stejné rovině nikde neprotnou, a daným bodem lze vést jedinou rovnoběžku s danou přímkou. V neeukleidovské geometrii, tedy na sféře nebo na hyperbolické ploše, to neplatí.

Konstrukce 18 až 20 ukazují, jak sestrojit rovnoběžku s danou přímkou a procházející bodem mimo ni. Jedná se o ty nejjednodušší postupy; konstrukce 18 a 19 užívají tři oblouky s jediným libovolným poloměrem, konstrukce 20 vystačí se dvěma oblouky, zato s rozdílnými poloměry. Konstrukce 23 je tak trochu podfuk, protože rovnoběžka neprochází dvěma sestrojenými body. Postup je ale jednoduchý a velice spolehlivý. V praxi může být považován za podobný přenášení vzdálenosti kružítkem – výsledek je realizovatelný eukleidovskou konstrukcí, ale používá se zkratka.

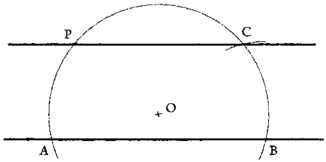
Mnohé ze základních konstrukcí se užívají v následujících úlohách a využívají se jako instrukce, např. *kolmice k AB procházející P.* Je proto dobré se s nimi seznámit, než budete pokračovat dál.



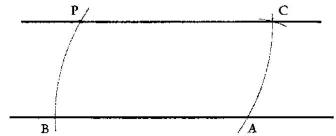
18. Rovnoběžka procházející daným bodem P:
1. Oblouk s vhodným poloměrem a se středem P (A);
2. Oblouk se stejným poloměrem a se středem A (B);
3. Oblouk se stejným poloměrem a se středem B (C);
Přímka PC je rovnoběžná s přímkou AB



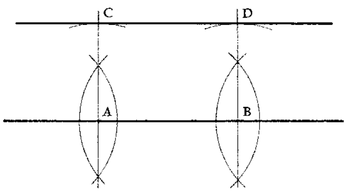
19. Rovnoběžka procházející daným bodem P:
1. Oblouk s vhodným poloměrem a se středem P (A);
2. Oblouk se stejným poloměrem a se středem A (B);
3. Oblouk se stejným poloměrem a se středem B (C);
Přímka PC je rovnoběžná s přímkou AB



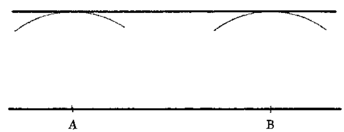
20. Rovnoběžka procházející daným bodem P:
1. Oblouk O-P s vhodným středem O (A, B);
2. Oblouk s poloměrem AP a se středem B (C);
přímka PC je rovnoběžná s přímkou AB



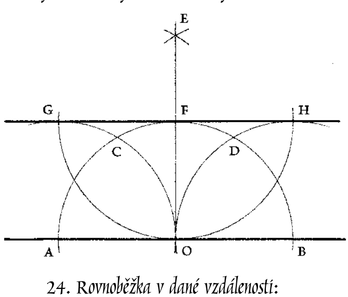
21. Rovnoběžka procházející daným bodem P:
1. Oblouk se středem P (A);
2. Oblouk A-P (B);
3. Oblouk s poloměrem BP a se středem A (C);
přímka PC je rovnoběžná s přímkou AB



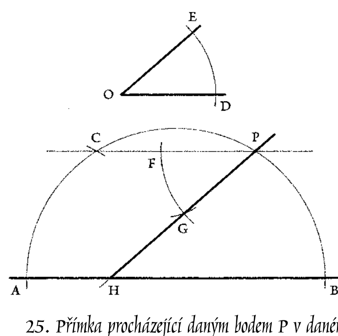
22. Rovnoběžka v dané vzdálenosti:
1. Jakékoli dvě kolmice k přímce (A, B);
2. Oblouky o poloměru rovném dané vzdálenosti a se středy A, B (C, D);
přímka CD je rovnoběžná s přímkou AB



23. Rovnoběžka v dané vzdálenosti:
1. Oblouky o poloměru rovném dané vzdálenosti a se středy v libovolných bodech A, B;
2. Společná tečna obou oblouků jako dle nákresu je rovnoběžná s přímkou AB



24. Rovnoběžka v dané vzdálenosti:
1. Oblouk o poloměru rovném dané vzdálenosti a se středem v libovolném bodě O na přímce (A, B);
2. Oblouky A-O, B-O (C, D);
3. Oblouky C-D, D-C (E);
4. Přímka EO (F); 5. Oblouk F-O (G, H);
přímka GFH je rovnoběžná s přímkou AB



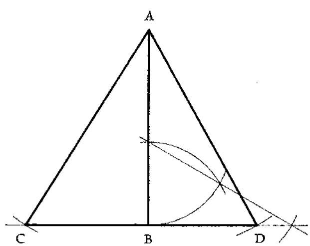
25. Přímka procházející daným bodem P v daném úhlu k přímce:
1. Rovnoběžka k přímce AB procházející P (přímka PC);
2. Oblouk se středem O (D, E);
3. Oblouk s poloměrem OE a se středem P (F);
4. Oblouk s poloměrem DE a se středem F (G);
5. Přímka GP (H); ∢BHP = ∢DOE

TROJÚHELNÍKY

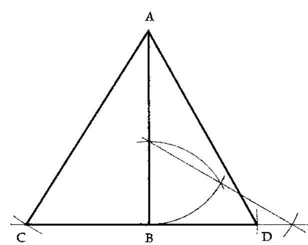
už tři tvoří mnohoúhelník

Jednoduché konstrukce trojúhelníků rozhodně stojí za naučení. Například pro sestrojení trojúhelníku, jsou-li dány tři jeho strany, stačí nakreslit úsečku o délce jedné z nich a z obou koncových bodů narýsovat oblouky o poloměrech zbývajících dvou. Průsečík oblouků je pak třetí vrchol trojúhelníku. Nebo pro konstrukci pravoúhlého trojúhelníku s danou délkou odvěsen stačí jejich délky vyznačit pomocí oblouků se středem v průsečíku dvou kolmic.

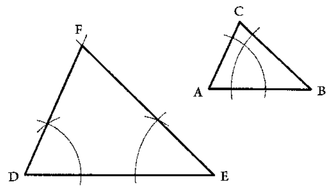
Konstrukce 26 může být rovněž využita pro sestrojení rovnoramenného trojúhelníku, máme-li danou jeho výšku a délku ramene. Konstrukce 30–32 využívají jednu z nejstarších matematických vět, Thaletovu (podle Thaleta z Milétu, † asi 546 př. n. l.). Trojúhelník vepsaný do půlkružnice tak, že jeho nejdelší strana je jejím průměrem, je pravoúhlý. Konstrukce 30 umožní konstrukci pravoúhlého trojúhelníku, známe-li přeponu a jednu odvěsnu. Konstrukce 33 je ze *Základů*.



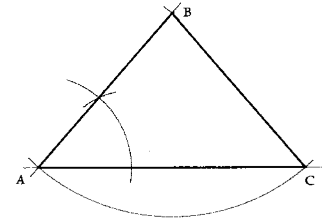
26. Trojúhelník s danými dvěma stranami a výškou třetí strany: 1. Kolmice k výšce AB v bodě B; 2. Oblouk s poloměrem jedné strany a se středem A (C); 3. Oblouk s poloměrem druhé strany a se středem A (D)



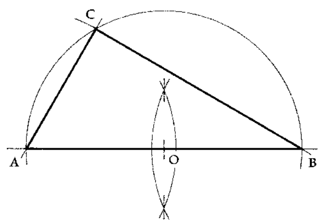
27. Trojúhelník s danými dvěma stranami a výškou jedné z nich: 1. Kolmice k výšce AB v bodě B; 2. Oblouk s poloměrem strany, k níž nemáme výšku, se středem A (C); 3. Oblouk s poloměrem strany, k níž máme výšku, se středem C (D)



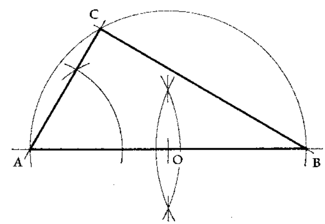
28. Podobný trojúhelník s danou jednou stranou:
1. Sestroj úhel s vrcholem v D rovný úhlu s vrcholem v A;
2. Sestroj úhel s vrcholem v E rovný úhlu s vrcholem v B (F)



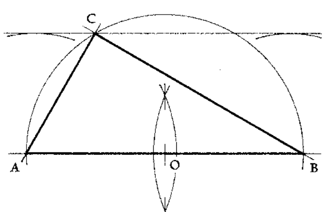
29. Rovnoramenný trojúhelník s daným ramenem a úhlem při základně: 1. Sestroj úhel s vrcholem v A rovný danému úhlu;
2. Oblouk s poloměrem délky ramena a se středem A (B);
3. Oblouk B-A (C)



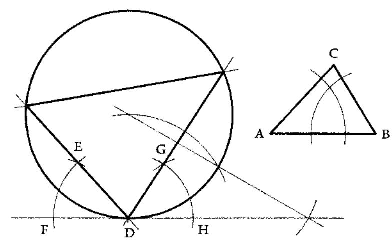
30. Pravoúhlý trojúhelník s danou přeponou a jednou odvěsnou: 1. Úsečka AB o délce rovné přeponě;
2. Střed AB (O); 3. Oblouk O-AB;
4. Oblouk s poloměrem dané odvěsny a se středem A (C)



31. Pravoúhlý trojúhelník s danou přeponou a přilehlým úhlem: 1. Úsečka AB o délce rovné přeponě;
2. Střed AB (O); 3. Oblouk O-AB;
4. Sestroj ∢CAB rovný daném úhlu (C)



32. Pravoúhlý trojúhelník s danou přeponou a její výškou:
1. Úsečka AB o délce rovné přeponě;
2. Střed AB (O);
3. Oblouk O-AB;
4. Rovnoběžka s AB ve vzdálenosti dané výšky (C)



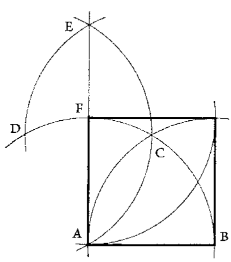
33. Podobný trojúhelník vepsaný kružnici:
1. Tečna ke kružnici v D;
2. Sestroj ∢EDF = ∢CAB;
3. Sestroj ∢GDH = ∢CBA
a průsečíky s kružnicí

Čtverce a kosočtverce
z přímek a kružnic

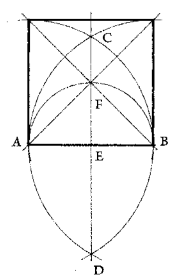
Jednoduché čtyřúhelníkové konstrukce se dají zvládnout snadno. Abyste sestrojili kružnici opsanou čtverci nebo obdélníku, nejprve zakreslete úhlopříčky a pak narýsujte kružnici se středem v jejich průsečíku a procházející všemi čtyřmi vrcholy. Pro kružnici vepsanou čtverci narýsujte kružnici opět se středem v průsečíku úhlopříček a procházející středy stran.

Úhlopříčky čtverců a kosočtverců se navzájem půlí a svírají pravý úhel. Objev poměru délky úhlopříčky čtverce k jeho straně – $\sqrt{2} : 1$ – vedl k důkazu, že některé délky jsou nesouměřitelné, tj. nelze je vyjádřit jako poměr celých čísel, jako racionální čísla. Jsou to tedy čísla iracionální.

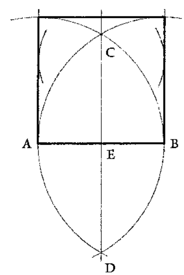
Konstrukce 39 pochází z *Baudhajánovy Šulba sútry* (asi 800–600 př. n. l.). Jde o návod, jak vytyčit čtvercový oltář na východozápadní linii, zvané *prácí*. Obzvlášť elegantního provedení dosáhnete zakreslením plných kružnic.



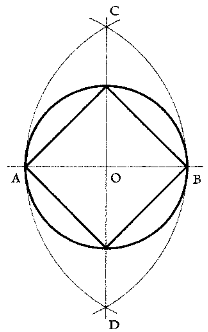
34. *Čtverec s danou stranou:*
1. *Oblouky* A-B, B-A (C);
2. *Oblouk* C-A (D);
3. *Oblouk* D-AC (*přímka* EFA);
4. *Oblouk* F-A *a vzniklý průsečík*



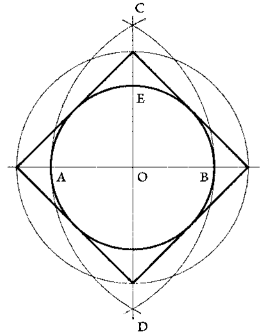
35. *Čtverec s danou stranou:*
1. *Oblouky* A-B, B-A (*přímka* CED); 2. *Oblouk* E-AB (F);
3. *Přímky* AF, BF *a vzniklé průsečíky*



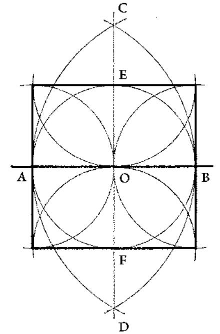
36. *Čtverec s danou stranou:*
1. *Oblouky* A-B, B-A (*přímka* CED); 2. *Rovnoběžky s* CED *procházející body* A, B *a vzniklé průsečíky*



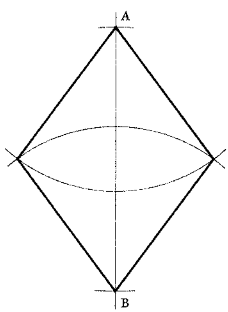
37. Čtverec vepsaný do kružnice
1. Přímka vedená středem O (A, B);
2. Oblouky A-B, B-A;
3. Přímka CD a její průsečíky
s kružnicí



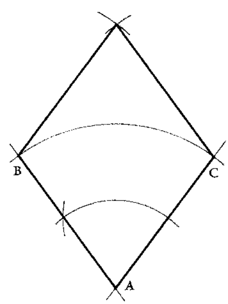
38. Čtverec opsaný kružnici:
1. Přímka vedená středem O (A, B):
2. Oblouky A-B, B-A (přímka CED);
3. Kružnice s poloměrem AE a se
středem O a její průsečíky s AB a CD



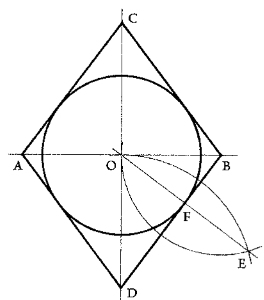
39. Čtverec příčně půlený danou
přímkou:
1. Kružnice se středem O na dané
přímce (A, B); 2. Oblouky A-B, B-A
(přímka CEFD); 3. Oblouky A-O,
B-O, E-O, F-O a jejich průsečíky



40. Kosočtverec s danou jednou
z úhlopříček a stranou:
1. Vyznač délku úhlopříčky na přímce
(A, B);
2. Oblouky s poloměrem dané strany
a se středy A, B a jejich průsečíky



41. Kosočtverec s daným jedním úhlem
a stranou:
1. Sestroj úhel s vrcholem v A rovný
danému úhlu;
2. Oblouk s poloměrem dané strany
a se středem A (B, C);
3. Oblouky B-A, C-A a jejich průsečík



42. Kružnice vepsaná kosočtverci:
1. Přímky AB, CD (O);
2. Oblouky B-O, D-O (přímka OFE);
3. Kružnice O-F