Pokročilá teorie her

ve světě kolem nás

Martin Chvoj

GRADA®

GRADA®

Pokročilá teorie her

ve světě kolem nás

Martin Chvoj

Grada Publishing

RNDr. Martin Chvoj, MBA

Pokročilá teorie her ve světě kolem nás

TIRÁŽ TIŠTĚNÉ PUBLIKACE:

Vydala Grada Publishing, a.s.
U Průhonu 22, 170 00 Praha 7
tel.: +420 234 264 401, fax: +420 234 264 400
www.grada.cz
jako svou 5095. publikaci

Odborný recenzent:
Doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.

Odpovědný redaktor Petr Somogyi
Sazba RNDr. Martin Chvoj, MBA
Počet stran 232
První vydání, Praha 2013
Vytiska Tiskárna PROTISK, s.r.o., České Budějovice

ISBN 978-80-247-4620-3

ELEKTRONICKÉ PUBLIKACE:

ISBN 978-80-247-8393-2 (ve formátu PDF)

Obsah

OBSAH 5

PODĚKOVÁNÍ 7

O AUTOROVI 9

PŘEDMLUVA 11

ÚVOD DO TEORIE HER 15

1.1 Klasická teorie her 15
1.2 Užitek a racionální chování 23
1.2.1 Užitek 23
1.2.2 Racionální chování 25
1.3 Kooperativní hry 28
1.4 Vězňovo dilema 32
1.5 Nematematické shrnutí 34

EVOLUČNÍ HRY 41

2.1 Motivace evolučních her 41
2.2 Statická analýza 42
2.3 Dynamická analýza 48
2.4 Asymetrické hry 55
2.4.1 Asymetrické hry využívající behaviorální strategie 56
2.4.2 Alternativní přístup k asymetrickým hrám 60
2.5 Nematematické shrnutí 65

PROBLÉM REGULACE 75

3.1 Problém optimální regulace 75
3.1.1 Formalizace problému regulace 76
3.1.2 Typy regulací 81
3.2 Variační počet 82
3.2.1 Nutné podmínky 84
3.3 Princip maxima 88
3.3.1 Věta o principu maxima 89
3.4 Hamilton-Jacobi-Bellmanova rovnice 93
3.5 Metody řešení, příklad a možné tvary výsledku 96
3.5.1 Poznámka k metodám řešení optimalizačních úloh 96
3.5.2 Možné tvary výsledku 99
3.6 Nematematické shrnutí 100

DIFERENCIÁLNÍ HRY **104**

4.1 Úvod do diferenciálních her 104
4.2 Rovnováhy v diferenciálních hrách 106
4.3 Typy diferenciálních her 109
4.3.1 Hry o pronásledování 109
4.3.2 Stochastické diferenciální hry 114
4.3.3 Nemarkovovy hry 116
4.4 Ilustrační příklad diferenciálních her 120
4.5 Nematematické shrnutí 126

STATISTICKÉ HRY **136**

5.1 Definice a motivace statistických her 136
5.2 Bayesovské hry 143
5.3 Nematematické shrnutí 154

METAHRY **161**

6.1 Vymezení pojmu „metahra“ 161
6.2 Definice a značení metaher 162
6.3 Metaracionální strategie, metarovnováha 165
6.4 Charakterizace metaracionálních strategií 172
6.5 Polemika na obhajobu metaher 174
6.6 Nematematické shrnutí 179

SUN-C' A TI DRUZÍ **190**

7.1 Teorie her jako věda 190
7.2 Teorie her jako pomůcka 191
7.2.1 Hry o pronásledování 192
7.2.2 Rozděl a panuj 195
7.2.3 Omezená informace 196
7.2.4 Využití omezené informace v politice 200
7.3 Teorie her jako zátěž 202

APENDIX **204**

A.1 Teorie míry 204
A.2 Teorie pravděpodobnosti 210
A.3 Jiné použité pojmy 222

LITERATURA **225**

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ **227**

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval svému otci, teoretickému fyzikovi doc. RNDr. Zdeňku Chvojovi, DrSc., jenž mě ve studiu matematiky již od útlého věku vytrvale podporoval a tato publikace, ke které mi dal mnoho užitečných rad, nechť je pro něj jistou zárukou, že jeho snaha nebyla marná. Zvláštní poděkování patří mému učiteli z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy doc. RNDr. Petru Lachoutovi, CSc., bez jehož odborných připomínek a kontroly zejména matematické korektnosti by tato kniha nemohla vzniknout. Teorie her je matematickou disciplínou, což běžně nepatří k nejlákavější četbě, proto bych rád poděkoval své blízké kamarádce Andree Fuxové za stylistickou korekturu a její příspěvky k čitelnosti často strohého technického textu. Tato kniha je určená především studentům aplikované matematiky. Za poznámky, jež vedly k přístupnosti knihy cílové skupině, vděčím své kamarádce a bývalé kolegyni Ing. Márii Bolcárové. Také bych rád poděkoval Bc. Elišce Sedláčkové, jejíž pevná ruka ozdobila každou kapitolu krásnou a výstižnou ilustrací.

Knihu věnuji své matce JUDr. Blance Chvojové za její podporu a stále usměvavou povahu.

O autorovi

RNDr. Martin Chvoj, MBA

Absolvent Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, obor finanční a pojistná matematika (RNDr. 2012) a Central European Management Institute (MBA 2013). Pracoval tři roky jako auditor ve velké čtyřce poradenských firem. Mimo profesní život byl aktivním členem akademického senátu, věnoval se organizování neziskových akcí pro mladé dospělé. Teorie her ho zaujala během studia a napsal na toto téma všechny studijně významné práce. Materiál, který v průběhu šesti let nasbíral, předává dále prostřednictvím této knihy.

Předmluva

V běžném životě často čelíme problémům, pro jejichž řešení potřebujeme nástroj, jenž nám pomůže učinit správná rozhodnutí. Jedním z takových nástrojů může být matematika a matematické modely. Pro mnoho lidí je však čistá matematika velmi nesrozumitelná a komplikovaná. Tudíž je potřeba ji nějak vhodně vyložit. Teorie her, jakožto samostatná matematická větev, získala svou oblíbenost právě díky tomu, že dokáže interpretovat matematické výsledky způsobem, kterému lidé rozumějí. Dobrým příkladem je třeba slavná Nashova věta, za kterou dostal John Nash v roce 1978 John Von Neumann Theory Prize. Tato věta nepřináší do matematické teorie mnoho nového. Jedná se vlastně pouze o Browerovu větu o pevném bodu aplikovanou v prostředí teorie her. Nicméně její skutečný význam spočívá v interpretaci. John Nash vyřkl závěr, který může být srozumitelný téměř každému, a tím nezpochybnitelně přispěl k přitažlivosti matematiky. Od té doby bylo vymyšleno mnoho základních modelových her, které se vyučují v řadě oborů, jako je biologie, psychologie, vojenská strategie apod. Tyto hry bývají demonstrovány na skutečných oborových situacích, a tím je matematika předávána dále lidem, kteří by třeba o ni jinak zájem neměli.

Toto je pravděpodobně způsobeno pojmem „hra“, který je lidem běžně známý a vzbuzuje představu, že nejde o náročné problémy. Nicméně teorie her pouze pohlíží na matematické problémy z jiného úhlu, formuluje běžné úlohy svou vlastní řečí, ale výpočty na pozadí si zachovávají veškerou matematickou náročnost. A právě proto může teorie her obsahovat i velmi složité a pokročilé úvahy. „Klasická teorie her“, jak ji zde představíme, popisuje především jednokolové hry a rozděluje konflikty do několika jednoduchých kategorií. My se jí budeme zabývat pouze z důvodu, že jde o neoddělitelné základy, které je potřeba popsat. V první kapitole je, mimo úvodu do teorie her, definovaný pojem Nashovy rovnováhy, což je stěžejní koncept rovnováhy pro většinu druhů her. Kniha se nicméně orientuje na jiné typy her, které jsou v české literatuře podstatně méně popsané. Čtenář by se do jejich studia měl pustit poté, co pochopí fungování a konstrukci Nashovy rovnováhy v základních hrách. Pro tyto účely doporučuji uznávanou literaturu profesora Maňase (Maňas, 1991) nebo o něco starší (Maňas, 1974).

Podotkněme, že se v této knize často budeme zabývat hledáním nějaké kombinace strategií, kterou nazveme rovnovážnou. V takové situaci hráči nemají důvod své strategie měnit. Každá kapitola se věnuje jinému typu her, tudíž budeme definovat lehce odlišné koncepty rovnováhy. Jak však při bližším zkoumání uvidíme, ačkoliv se mohou tyto rovnováhy zdát v definici odlišné, v zásadě se všechny odráží od jedné a té samé myšlenky. Jde právě o již zmíněný koncept Nashovy rovnováhy, jenž říká, že v rovnovážném stavu nemá žádný jedinec lepší možnost než hrát rovnovážnou strategii. Mohli bychom se však ptát, proč vůbec takovou rovnováhu hledat. Co nám o hráčích řekne? V odpovědi na tuto otázku nesmí chybět zmínka o tom, že popisování a hledání rovnovážných bodů je nedílnou součástí jakékoliv literatury zabývající se teorií her, proto by byl hřích zde tyto úvahy nevyložit. Z pragmatického hlediska však důvod pro hledání rovnováhy existovat nemusí. Empirické průzkumy nám opakovaně dokazují, že například lidští hráči se podle rovnovážných strategií nechovají. Nicméně i když asi nebudeme schopni přímo určit, jak se hráč bude ve hře chovat jen čistě na základě nalezení rovnovážné strategie, tak jsme schopni lépe odhadovat pravděpodobné chování hráče. Rovnovážná strategie tak bývá dobrým nástrojem k analýze chování racionálních hráčů.

Druhá a čtvrtá kapitola se soustředí na vícekolové hry, kdy hrají hráči tutéž hru opakovaně a mohou své strategie v dalších kolech měnit. Jednu z větví těchto vícekolových her představují tzv. evoluční hry, což jsou v zásadě vícekolové hry, do nichž je zapracován mechanizmus inspirovaný Darwinovou evoluční teorií. Nejprve zde popisujeme evoluční hry ze statického pohledu a definujeme koncept evolučně stabilní rovnováhy. Tím, že se hry opakují a hrají vícekrát za sebou, je užitečné dívat se na evoluční hry také z dynamického hlediska. Zejména nás zajímá, zda lze zavést nějaký dynamický koncept (alespoň lokální) rovnováhy. Tu nalézáme pod pojmem asymptoticky stabilní rovnováha.

Ve čtvrté kapitole se zabýváme diferenciálními hrami. Ty se od evolučních liší především tím, že zatímco v evolučních hrách hráči hrají konečný počet kol a čas zde vystupuje diskrétně (skokovitě), tak v diferenciálních hrách se vždy hraje nekonečný počet kol a čas zde vystupuje spojitě. Trochu nepřesně by se dalo říci, že evoluční hry jsou diskrétní verzí diferenciálních her. I v diferenciálních hrách lze zavést koncept rovnováhy známý jako Markovova Nashova rovnováha, která je opět jakousi obdobou Nashovy rovnováhy z klasické teorie her.

V páté kapitole, jež nese název „statistické hry“, se vracíme k rozšíření přehledu teorie her. Výklad je zúžen na jednokolové hry dvou hráčů: statistika a přírody, přičemž se na problém díváme pouze z pohledu statistika. U přírody očekáváme, že jde o hráče, jehož volbu strategie nemůžeme z dostupných informací spolehlivě determinovat, a proto používáme matematický aparát z teorie pravděpodobnosti. Popisujeme situaci, kdy statistik učiní pokus a na základě jeho výsledku se snaží pomocí Bayesovské metody odhadnout, jakou strategii příroda do hry zvolí.

Šestá kapitola je zároveň poslední kapitola, která popisuje matematické partie teorie her. Věnuje se v literatuře málo popisované větvi známé jako metahry. Tento přístup se snaží dívat na hry odlišným způsobem než předchozí hry a jeho motivace vychází z pozorování přemýšlení lidí. Popisujeme zde situace, kdy alespoň jeden z hráčů volí své strategie až poté, co všichni ostatní oznámili ty své. Stejný model se však skrývá i za myšlenkou, že jeden hráč dokáže spolehlivě odhadnout volbu strategií ostatních hráčů a tudíž se chová, jako by volil svou strategii až poslední. Právě pro tuto vlastnost jsou metahry vhodné k modelování situací, kde jsou hráči lidé. V samotném závěru kapitoly je uvedena polemika ospravedlňující tento přístup.

Závěrečná sedmá kapitola se vůbec nezabývá matematikou. Klademe si v ní několik pragmatických otázek týkajících se použitelnosti teorie her v běžném životě. Ptáme se, jak lze využít složité modely pro situace, před nimiž denně stojíme. Zda je potřeba se teorií her zabývat a analyzovat je, nebo nám stačí pouze tradiční poučky, jak je psal Sun-c' a jemu podobní. Tato kapitola zároveň slouží jako doslov a shrnutí celé knihy a snaží se ukázat cestu, jak vidět hry v situacích kolem nás. Matematická část je zde z pochopitelných důvodů zcela vypuštěna a jediné, co zbývá, jsou praktické závěry a otázky k zamyšlení.

Na samý závěr knihy je umístěn Apendix, v němž jsou uvedeny a stroze okomentovány matematické pojmy a závěry použité v předchozích kapitolách, u nichž nebyl prostor k důslednému výkladu. Plné pochopení zde uvedených definicí a vět předpokládá základní znalosti matematické analýzy a diferenciálního počtu, který je vyučován v prvních ročnících většiny vysokých škol s matematickým zaměřením. Apendix pak doplňuje tuto látku zejména o základy teorie míry a teorie pravděpodobnosti. Pro hlubší pochopení těchto myšlenek je však třeba obrátit se na odbornou literaturu zaměřující se přímo na tyto oblasti matematiky.

Definice a věty uvedené v knize jsou převzaty z literatury, jež je k nalezení za apendixem. Uvedená literatura však není míněna jako kompletní seznam všeho, co bylo o zde probíraných částech napsáno. Její kompletní výčet by vystačil na další menší knihu. V dobách internetu není ani takový seznam žádoucí. Pokud budeme brát v potaz i internetové články a elektronické publikace, tak lze říci, že nové texty tohoto výukového a popularizačního typu se ve světě objevují velmi často a jakýkoliv pokus o úplný seznam by velmi rychle zastaral. Čtenář mající zájem dále rozšířit své obzory v oblasti teorie her může pokračovat ve zdrojové literatuře uvedené v závěru, ale stejně tak dobře může zadat do internetového vyhledávače hledaný výraz a v krátkém čase dohledat materiál, jenž ho zajímá. Jedním dechem však dodávám, že česky napsaných textů týkajících se pokročilých partií teorie her je v době vydání této knihy velmi omezené množství a je tak třeba sáhnout po anglicky psané literatuře. Kniha by neměla být chápána jako vědecká práce a nemá ambice vytvářet nové matematické závěry. Měla by sloužit jako průvodce světem vybraných pokročilých partií teorie her. Každá kapitola je rozdělena na dvě části, přičemž první část je primárně matematická a druhá čistě nematematická. Obě části vykládají to samé, ale matematická část je určena pro čtenáře, kterým nedělá problém orientovat se v matematických symbolech a považují tyto zápisy za přehledné a srozumitelné. Také příklady, jež jsou zde uvedené, jsou popsané jako matematické modely, které pak dále řešíme. Naproti tomu nematematická část neobsahuje žádné exaktní definice a věty, vše je zde vyjadřováno slovně. Výsledky jsou interpretovány a ilustrovány na příkladech vybraných za účelem provázání hlavní myšlenky probírané kapitoly s praktickými situacemi z běžného života.

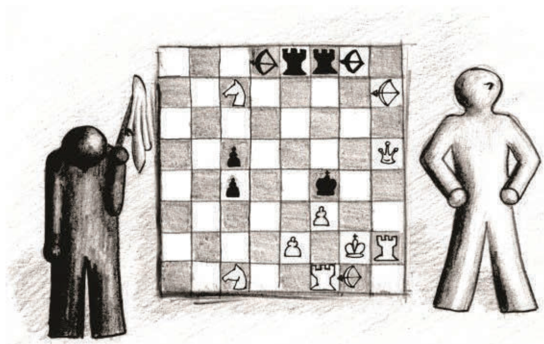
Výběr kapitol je proveden podle následující koncepce. V úvodní kapitole jsou představeny hry, jež jsou považovány za absolutní základ. Jde však pouze jen o jeho stručné připomenutí, abychom získali nějaký odrazový můstek pro zajímavější a složitější partie teorie her. Historicky jde také o první modely, které se začaly nazývat hrami. Tyto matematicky jednoduché hry jsou však jen obtížně použitelné, pokud bychom chtěli modelovat běžné situace nějak přesněji. Většinou když v životě volíme svá rozhodnutí, tak přemýšlíme dopředu a zvažujeme následky svých činů. Stejně tak přemýšlí i naši protihráči a všichni tak volí své strategie s vědomím, že touto hrou svět nekončí. Zdá se tedy, že bychom se měli zabývat i vícekolovými hrami, které vnáší do teorie čas. Vývoj her v čase je tak první krok k pokročilým partiím teorie her. Evoluční hry z druhé kapitoly pracují se skokovitým časem a diferenciální hry pak tyto evoluční zobecňují a uvažují modely, kdy čas plyne spojitě. Pomocí aparátu z těchto kapitol jsme již schopni namodelovat téměř jakoukoliv situaci, která nás napadne a o které máme plnou informaci. To však není v praxi normální. Běžně se stává, že něco nevíme, nebo neumíme deterministicky modelovat. Nějaké informace nám jsou skryté a my je musíme odhadnout. V takové chvíli má pro nás matematika modely, které pracují s náhodou, tzv. stochastické modely. Úvod do her, které tyto modely používají, lze nalézt v kapitole zabývající se statistickými hrami. Pokud ovládneme i tuto kapitolu, pak jsme již schopni namodelovat téměř libovolnou situaci. Další krok je tedy přirozeně zamyslet se nad tím, zda jsou hry vůbec použitelné tam, kde je použít chceme. Co bychom od her mohli čekat, to je modelování rozhodování živých lidí. Když bychom se po přečtení páté kapitoly ohlédli, mohli bychom zjistit, že dosavadní konstrukce her jde jinou cestou než myšlenky běžného člověka. Nabízí se tedy možnost pokusit se modelovat myšlenkové toky lidí jinak. O to se pokoušejí metahry popsané v šesté kapitole. Od páté kapitoly se také mění pohled na hry. Zatímco v prvních čtyřech kapitolách se celou dobu díváme na hry jako na „nějakým způsobem fungující systém“, tak v posledních kapitolách hry analyzujeme zejména z pohledu jednoho individuálního hráče. Závěrečná sedmá kapitola se pak snaží uvažovat nad skutečnou užitečností matematických modelů a hledí na celou knihu pragmatickým okem.

Na závěr úvodu bych se s vámi podělil o jednu vzpomínku z doby, kdy jsem chodil do druhé třídy a o teorii her jsem ještě nic nevěděl. Přesto jde myslím o pěknou ilustraci teorie her z běžného života. Tehdy jsme ve škole v hodinách psaní přecházeli od sestavování písmenek a psaní tužkou k dospělejším metodám. Měli jsme se začít učit psát plnícím perem. Rozdali nám proto taková zelená pera, do nichž se musel nejprve natáhnout inkoust. Bohužel jsem nepatřil k těm nejzručnějším ve třídě, a tak se mi po pár dnech podařilo ten inkoust z pera vypustit do penálu. Abyste pochopili, jaký to byl problém, tak je třeba říci, že mě naše třídní učitelka neměla ráda a často mě před třídou zesměšňovala. Kdyby přišla na to, co jsem udělal, byla by štěstím bez sebe a mohla by být na koni několik týdnů. Potřeboval jsem se nějak vyhnout tomu, abych byl označen za špindíru a sklidil škodolibé posměšky od zbytku třídy. Pamatuji si, že jsem o tom usilovně přemýšlel celou velkou přestávku, až jsem skutečně našel řešení. Dnes bych ho označil za geniální. Byl jsem pro naší třídní učitelku trnem v oku, ale stejně tak ve třídě měla i své oblíbence. Jako byla například věčně vzorná Terezka. Chudák Terezka měla tu smůlu, že se stala příliš velkým mazlíčkem naší třídní učitelky a tudíž i mým vhodným prostředkem, jak se vyhnout cílenému ponížení. Moje strategie spočívala v tom, že jsem z individuálního problému udělal daleko větší problém, k jehož řešení bylo potřeba použít úplně jiné prostředky. V nepozorovaný okamžik jsem Terezce udělal to, co jsem udělal sám sobě, a vypustil jsem její plnící pero do jejího penálu. Jakmile Terezka zjistila, jakou spoušť jí v penálu udělalo nové pero, řekla to učitelce, která okamžitě začala zjišťovat, co se stalo. Přihlásil jsem se, že se mi přihodilo to samé. A kupodivu se přidali ještě další dva spolužáci se stejným problémem, kteří to doposud tajili. Kdybych se přihlásil jenom já, bylo by to trapné, ale tím, že do toho byla zapletena i Terezka, která by nic špatně udělat nemohla, musela být chyba někde jinde. Výsledkem bylo, že nám učitelka dovolila používat propisky.

1

Úvod do teorie her

1.1 Klasická teorie her



Teorii her lze chápat jako můstek mezi reálnými každodenními problémy, ve kterých je potřeba učinit nějaké rozhodnutí, a teoretickou matematikou, v níž se často zdá, že se skutečným světem nemá nic společného. Situace, kde jsou nutná rozhodnutí (nazývané někdy též konflikty), mohou být libovolného charakteru, jenž vás při tomto slově napadne. Můžete si pod tím představit spor sourozenců o to, kdo umyje nádobí, cenovou válku dvou konkurenčních firem, boj zvířat o potravu, šachovou partii, rozhodování o strategii politické kampaně… Záleží jen na fantazii a schopnosti vnímat danou situaci jako „konfliktní“ v tom smyslu, že je nutné vybrat strategii, s níž bude jedinec situaci řešit. Teorie her je pak mocným matematickým nástrojem, který může usnadnit výběr takové strategie a dosáhnout lépe kýženého výsledku.

K pochopení této knihy je nutné si uvědomit, že ačkoliv využívá každá kapitola jiný matematický aparát a pracuje s jinými pojmy, tak jde vždy jen o jinou definici čtyř základních pojmů: **hra**, **hráči**, **strategie** a **výplata**. Celá teorie her se o tyto pojmy opírá a různé kategorie her spočívají jen v obměně vymezení, co který pojem reprezentuje. To, že se pak dostaneme k jiným matematickým prostředkům, je již jen důsledek potřeby vzniklý problém řešit.

Pojďme si tedy slovně říci, co jednotlivé pojmy znamenají. Hra je jakýsi mechanizmus pravidel, do něhož vstupují různě inteligentní objekty zvaní hráči, hrající hru se strategiemi, jež si zvolili z nějaké množiny strategií. Hra pak posbírá od všech hráčů jejich strategie, vyhodnotí je a jednotlivým hráčům rozdělí výhry neboli výplaty.

Tím se dostáváme k vysvětlení, jak se stane, že si text v jedné knize o teorii her přečte bez problémů čtenář, na něhož je kladen pouze požadavek středoškolské matematiky, a v jiné, podobné knize se pak ztrácí v pojmech jako funkcionál nebo stochastický integrál. Jedno je však zřejmé – teorie her je především matematická disciplína, proto se bez matematiky a logického uvažování neobejdeme. Tvorba matematického pozadí kolem jednotlivých kategorií teorie her funguje následovně:

1) Určí se, jaký druh reálného konfliktu chceme pomocí her modelovat.
2) V souladu s bodem 1) se vymezí čtveřice základních pojmů: hra, hráči, strategie a výplata. Například hra může být jednokolová nebo vícekolová, hráči mohou být přemýšliví nebo nevypočitatelní, strategie pro všechny hráče stejné nebo má každý individuální možnosti volby, výplata vypočitatelná nebo nejistá apod.
3) Když máme definované čtyři základní pojmy, tak můžeme sestavit optimalizační úlohu, kterou se budeme snažit vyřešit. Tato úloha má tvar a složitost danou právě charakterem jednotlivých detailů, které jsme určili v bodu 2).
4) Jakmile máme formulovanou optimalizační úlohu, tak hledáme vhodný matematický nástroj, kterým se pokusíme, co nejpřesněji úlohu vyřešit. Záměrně zde píši „co nejpřesněji“, protože často jsou optimalizační úlohy tak složité, že buď by bylo přesné vyřešení úlohy příliš časově nákladné, nebo není matematický nástroj vůbec dostupný.
5) Výsledek z bodu 4) interpretujeme do kontextu identifikovaného konfliktu z bodu 1) a posoudíme, zda jsme dostali rozumný závěr, který situaci nějak může řešit, či ji alespoň vhodně a použitelně analyzuje.

Jak ale poznáme, zda námi zvolený přístup vhodně řeší zkoumaný problém? Pro drtivou většinu situací reálného života nepotřebujeme znát číselně přesné výsledky. Už jen fakt, že ve výplatě hráčů pracujeme s užitkem, nám dává mnoho „příležitostí“ k nepřesným odhadům tvarů výplatních funkcí. V bodu 4) je také psáno, že se problémy řeší často aproximačními metodami. Dopouštíme se různých zjednodušení, jako třeba že populaci 10 milionů hráčů šikovně nahradíme jedním hráčem, abychom pak neměli 10 milionů rovnic pro výplatu. Diferenciální rovnice, které mohou vzniknout u diferenciálních her (viz kapitola 4), se často řeší numericky, neboť by analytické řešení bylo příliš zdlouhavé a navíc bychom ho byli schopni vypočíst jen u jednoduchých her. A reálné situace se jen zřídkakdy dají vyjádřit pomocí jednoduchých her. Po takovýchto ústupcích od ideálního řešení je pak vždy dobré nezapomenout na bod 5) a své závěry si nějakým způsobem otestovat. Například zda jsou v souladu s historickými daty. Třeba při špatné volbě modelu hry nám může u plánování politické kampaně vyjít závěr, že nejlepší strategií by bylo zavést jednotnou daň z příjmu 90 %. Politik, který by však tuto daň navrhl, by brzy zjistil, že výsledná optimální strategie je politicky neprosaditelná. V takové situaci by bylo potřeba učinit závěr, že buď modelu chyběla nějaká omezení, nebo že se model špatně interpretoval.

Z těchto důvodů se výklad teorie her zpravidla omezuje na body 2) až 4) a body 1) a 5) pouze pro inspiraci uvádí na několika příkladech. V naší knize budeme postupovat úplně stejně. Nicméně hlavním cílem knihy je, aby si pak čtenář dokázal kroky 1) a 5) domyslet již sám, aby chápal, jak jsou jednotlivé typy her spolu propojené, aby dokázal přemýšlet o každodenních situacích v řeči teorie her.

Přejděme nyní k matematické formalizaci, bez které se dále v knize neobejdeme. Obecně můžeme hru definovat takto:

Definice 1.1: *Nechť je dána konečná neprázdná N-prvková množina $H = \{1, \dots, N\}$ a dále N měřitelných množin $X_1, \dots, X_N$ a N omezených reálných funkcí $M_1, \dots, M_N$ definovaných na kartézském součinu $X_1 \times \dots \times X_N$.* ***Hrou N hráčů v normálním*** *tvaru budeme rozumět uspořádanou $(2N+1)$-tici*

(1.1)

$$G = \{H, X_1, \dots, X_N, M_1, \dots, M_N\}$$ [I]

Množinu H nazveme ***množinou hráčů****, množinu X_i nazveme* ***prostorem strategií hráče i****, prvek $x_i \in X_i$ nazveme* ***strategií hráče i*** *a funkci M_i nazveme* ***výplatní funkcí hráče i*** *(vše pro $i \in H$).*

Hodnotu výplatní funkce M_i nazveme ***výplatou hráče i****. Je-li hodnota výplatní funkce pro daného hráče kladná, hovoříme o* ***zisku****, je-li záporná, hovoříme o* ***ztrátě****.*

Podmnožina množiny H se nazývá ***koalice****. Spojenou strategii hráčů z koalice $L \subseteq H$, $L = \{i_1, \dots, i_l\}$ značíme $x_L \in X_L$, kde $X_L = X_{i_1} \times \dots \times X_{i_l}$ je prostor spojených strategií hráčů z L.*

Zde je na místě důležitá poznámka k značení. V definici (1.1) jsme označili $x \in X$ jako strategie hráčů. Nicméně značení x jako strategie se nebudeme v následujících kapitolách striktně držet. Proto je na místě věnovat pozornost značení v úvodu každé kapitoly, aby nedošlo k chybné interpretaci vyložené látky.

Uveďme, že chceme-li vypočíst výplatu hráče i, tak jakkoliv může být nemateriální, je vhodné modelovat výplatní funkce M_i tak, aby vyjadřovaly užitek, který danému hráči přinese výsledek hry. V hrách, kde se vyskytují peníze, zpravidla používáme totiž předpoklad, že hráčův užitek je přímo úměrný výši jeho peněžního příjmu. Užitku se blíže věnuje následující podkapitola.

Když nyní známe obecnou definici hry, pojďme se podívat, jak lze hry kategorizovat pomocí různých vymezení základních pojmů. Celková klasifikace her je však v literatuře nejednotná. Následující výčet není úplný a ani zdaleka jediný. Pokud však čtenář pochopí, že se k jednotlivým bodům dostane skrz obměnu základních pojmů, pak nebude tuto klasifikaci potřebovat a třeba si vytvoří i vlastní. Uvádím zde tento výčet kvůli lepší orientaci v literatuře. Zde je tedy jen několik možných pohledů na hry, jež mohou sloužit jako vodítko k představě, jak hry členit či klasifikovat:

[I] V dalším budeme značit $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_N)$, $\boldsymbol{M} = (M_1, \dots, M_N)$ a hra pak bude $G = (H, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{M})$

i) *Kooperativní a nekooperativní hry*

Hry jsou kooperativní, pokud mohou hráči uzavírat vynutitelné dohody, v nekooperativních hrách toto umožněno není.

ii) *Jednokolové a vícekolové hry*

V jednokolových hrách hráči odehrají jednu hru, rozeberou si výplaty a zkušenosti nabyté ve hře již dále neuplatňují. Důležité je také, že hráči přímo volí své strategie na základě faktu, že další kola hry již nebudou. Ve vícekolových hrách se hraje hra vícekrát za sebou a hráči před každým kolem mohou změnit své strategie. Ve volbě rozumných rozhodnutí vzniká potřeba uvažovat více kol dopředu, neboť je zde například hrozba msty ze strany hráčů, kteří vyjdou z dřívějších kol poškození nebo s horší výplatou. Zvláštní případ vícekolových her, kde hráči kopírují strategie úspěšnějších hráčů, se nazývají *evoluční hry* (viz kapitola 2).

Je třeba zmínit, že pokud hráči vědí, že hrají poslední kolo vícekolové hry, tak se chovají, jakoby hráli jednokolovou hru. Jejich volba strategií se tedy mění na základě počtu kol, která mají před sebou. Dobrý příklad jednokolové hry je konkurzní řízení firmy v likvidaci. Všichni zúčastnění se snaží ze zbankrotované firmy sobecky vytáhnout co nejvíce peněz. Zatímco pokud firma funguje normálně a zdravě, hrají akcionáři vícekolovou hru a jejich cíle můžou být i dlouhodobé, nebudou se tak snažit jen vybrat z firmy v co nejkratším čase co nejvíce peněz.

iii) *Symetrické a asymetrické hry*

Pod symetrickými hrami se zpravidla rozumí takové hry, kde hráči volí ze shodné množiny strategií. V některých zdrojích se ještě navíc předpokládá, že výplatní funkce jsou pro hráče stejné. V asymetrických hrách nic takového neplatí a hráči se pak logicky ocitají v nerovnocenném postavení.

iv) *Hry s nulovým součtem a hry s nenulovým součtem*

Hry, ve kterých je součet výplat všech hráčů vždy roven nule, jsou hry s nulovým součtem. Velmi často lze za hry s nulovým součtem označit hry, kde je součet výplat všech hráčů roven jakékoliv dopředu dané konstantě. Hry s nenulovým součtem jsou pak hry, kde nelze dopředu určit, jaká konkrétně bude hodnota součtu výplat všech hráčů.

v) *Hry s úplnou (dokonalou) informací a s částečnou informací*

Hry s úplnou informací jsou takové hry, kde hráči mohou znát všechny možné průběhy hry. Hry s částečnou informací jsou naproti tomu takové, kde hráči dopředu neznají některé prvky ve hře, např. množinu strategií protihráče, svoji výplatu, počet hráčů apod. V ekonomických problémech jde téměř vždy o případ hry s nedokonalou informací a získávání dalších informací je nákladné, čímž se snižuje hodnota výplatní funkce hráče, který vynakládá prostředky na získání chybějících informací.

vi) *Nekonečně dlouhé hry*

Jsou hypotetické hry, které mají nekonečný počet kol. Jejich význam je především teoretický a zkoumání takovýchto her může sloužit například k poznání chování nějakého modelu v limitních podmínkách.

vii) *Konečné, diskrétní a spojité hry*

V konečných hrách je množina strategií každého hráče konečná. V diskrétních hrách může být tato množina navíc i nekonečná spočetná. Pokud je tato množina nespočetná, pak jde o spojité hry.

viii) *Simultánní hry a metahry (neboli sekvenční hry)*

Simultánní hry jsou takové, ve kterých všichni hráči postupují současně. Nebo obecněji jde o hry, kdy hráči v momentě volby své strategie nevědí, jak se zachovají či zachovali ostatní hráči. V metahrách (viz kapitola 6) volí hráči své strategie postupně, a tak mohou mít informace o volbách strategií některých svých protihráčů. Metahrám se někdy říká též sekvenční hry.

Inteligentní hráči jsou ti, kteří provádějí logické analýzy a na základě všech dostupných informací zvolí racionální řešení, jež maximalizuje hodnotu jejich modelované výplatní funkce. Takový hráč bere při výběru své strategie v úvahu všechna možná rozhodnutí ostatních hráčů. Hráči, kteří volí strategie zcela náhodně, a tudíž nezávisle na hodnotách jejich modelované výplatní funkce, se nazývají **neinteligentní**. A hráči, kteří se s pravděpodobností p chovají jako hráči inteligentní a s pravděpodobností $1-p$ jako hráči neinteligentní, se nazývají **p-inteligentní**.

Lze ukázat, že pokud je ve hře více hráčů neinteligentních, pak můžeme bez újmy na obecnosti všechny vlivy jejich rozhodnutí shrnout do rozhodnutí jediného neinteligentního hráče. Jestliže je v rozhodovací situaci jeden hráč neinteligentní (nebo s ohledem na předchozí větu i více hráčů neinteligentních), nazvěme ho hráč 1, a pouze jeden hráč inteligentní, nazvěme ho hráč 2, pak rozhodování hráče 2 se nazývá **rozhodování při riziku** tehdy, pokud hráč 2 zná rozdělení pravděpodobnosti výběru strategie hráče 1. Pokud toto rozdělení není hráči 2 známo, hovoříme o **rozhodování při nejistotě**.

Mluvíme-li o inteligentním hráči generujícím racionální rozhodnutí (tím se zabývá podkapitola 1.2.2), tak musíme vytvořit nástroje a koncepty, u kterých řekneme, že přemýšlivý hráč s nimi při svých rozhodnutích nějakým způsobem pracuje. Pro popis výběru strategie inteligentního hráče nám může posloužit následující definice:

Definice 1.2: *N-tici strategií $\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_N})$ nazveme* ***rovnovážným bodem*** *(příslušné hry v normálním tvaru), jestliže platí:*
(1.2)

$$M_i(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{i-1}}, x_i, \overline{x_{i+1}}, \dots, \overline{x_N}) \leq M_i(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_N})$$

pro všechna $i \in H$ a všechna $x_i \in X_i$. Složka $\overline{x_i}$ se nazývá ***rovnovážnou strategií i-tého hráče****.*

Rovnovážná strategie i-tého hráče x_i je nejlepší strategie i-tého hráče za předpokladu, že ostatní hráči nezmění své strategie. Někdy se též rovnovážnému bodu (tedy kombinaci strategií, kdy všichni hráči volí rovnovážné strategie) říká **Nashova rovnováha** nebo zkráceně **rovnováha**. V **Nashově rovnováze** z definice platí, že kdyby se kterýkoliv hráč samostatně odchýlil od své rovnovážné strategie, tak si svou výplatu pohorší. Rovnováha nám však nic neříká o tom, jak se bude konflikt vyvíjet, pokud se od ní odchýlí více hráčů najednou. K tomuto nedostatku konceptu Nashovy rovnováhy se v knize ještě několikrát vrátíme.

Zatím jsme uvažovali, že hráči volí jen jednu strategii ze své množiny strategií. Představme si následující situace:

- Máme jednoduchou symetrickou hru dvou hráčů, s množinou strategií $\{A, B\}$. Sledujeme hru jen z pohledu hráče 1. Hráč 2 není příliš inteligentní, nejsme si tudíž jisti, jakou bude volit strategii. Klasicky bychom mohli říci třeba „hráč 2 na 80 % zvolí strategii A a na 20 % strategii B“.
- Jiná situace. Hrajeme nekonečnou sekvenční symetrickou hru dvou hráčů s množinou strategií $\{A, B\}$. Hráč 1 volí strategii A v průměru jednou za 4 kola a hráč 2 volí strategii A každé druhé kolo.

V obou situacích je potřeba vyjádřit volbu strategie nikoliv jako jeden prvek z množiny strategií, ale jako vektor pravděpodobností, s jakou volí hráč 1 korespondující strategie z množiny strategií. Takovému vektoru se říká smíšená strategie. S takovou vágní definicí se spokojíme pro většinu diskrétních her a pro klasickou teorii her. Nicméně v této knize se setkáme i s případy, kdy bude množina strategií nespočetná. Pak již nemůžeme za smíšenou strategii označit vektor, ale obecně pravděpodobnostní míru. Tu bude možné ve speciálním případě konečné množiny strategií vyjádřit pomocí vektoru. Tato drobná nuance mění podobu