Mario Livio

JE BŮH MATEMATIK?

argo / dokořán

Mario Livio

JE BŮH MATEMATIK?

ARGO / DOKOŘÁN

Mario Livio
JE BŮH MATEMATIK?

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).
Z anglického originálu *Is God a Mathematician?* vydaného nakladatelstvím Simon & Schuster v New Yorku 2009 přeložil Petr Holčák.
Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.
Redakce Pavel Houser.
Jazyková korektura Tereza Ješátková.
Obálka Pavel Růt. Grafická úprava Vladimír Fára, sazba Miloš Jirsa.
Konverze do elektronické verze Michal Puhač.
Vydalo v roce 2018 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, Praha 5, dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 960. publikaci (290. elektronická).

ISBN 978-80-7363-898-6

Sofii

OBSAH

ÚVODEM

Jestliže se pracovně zabýváte kosmologií, volně řečeno studiem vesmíru jako celku, bývá běžnou součástí vašeho života každotýdenní dávka dopisů, e-mailů nebo faxů od lidí (bez výjimky mužů), kteří potřebují, abyste se seznámili s jejich vlastními teoriemi vesmíru. Největší chybou, kterou můžete udělat, je zdvořile odpovědět, že byste si přáli dozvědět se o věci víc. Okamžitě totiž následuje nekonečná kanonáda přípisů a vzkazů. Jak se dá takovému útoku zabránit? Taktika, o jejíž účinnosti jsem se přesvědčil (nebudeme-li počítat nezdvořilé ponechání dopisu bez odpovědi), je upozornit pisatele, že pokud není příslušná teorie formulována precizním jazykem matematiky, pak její platnost nelze dost dobře zhodnotit. Taková odpověď zastaví v rozletu většinu amatérských kosmologů. Realita je taková, že bez matematiky by moderní kosmologie nedokázala ve snaze o pochopení přírodních zákonů postoupit ani o píď. Matematika dodává pevnou konstrukci, která drží pohromadě jakoukoli teorii vesmíru. Možná to nebude znít až tak překvapivě, to ale jen dokud si neuvědomíme, že ani povaha matematiky samé není úplně jasná. Jak to jednou vyjádřil britský filozof Michael Dummett: „Dvě nejabstraktnější intelektuální disciplíny, filozofie a matematika, působí v hlavách tentýž zmatek a vyvolávají tutéž otázku: *o čem* vlastně jsou? Tento zmatek neplyne pouze z nevědomosti: dokonce i pro ty, kdo v oněch oborech pracují, může být odpověď na tuto otázku obtížná.“

V následující knize se budu pokorně pokoušet o vyjasnění některých stránek podstaty matematiky a zejména povahy vztahu mezi matematikou a pozorovaným světem. Mým záměrem určitě není předkládat úplné dějiny matematiky. Chci spíše chronologicky sledovat vývoj některých pojetí, která mají přímý dopad na to, jak chápeme roli matematiky v našem poznávání vesmíru.

K myšlenkám obsaženým v této knize přímo i nepřímo dlouhodobě přispívala celá řada lidí. Rád bych za užitečné výměny názorů poděkoval Michaelu Atiyahovi, Gia Dvalimu, Freemanu Dysonovi, Hillelu Gauchmanovi, Davidu

Grossovi, Rogeru Penroseovi, Martinu Reesovi, Ramanu Sundrumovi, Maxi Tegmarkovi, Stevenu Weinbergovi a Stephenu Wolframovi. Jsem zavázán Dorothy Morgensternové Thomasové za to, že mi umožnila využít kompletního textu, v němž Oscar Morgenstern popsal zážitek Kurta Gödela s americkým Úřadem pro přistěhovalectví. William Christens-Barry, Keith Knox, Roger Easton a především Will Noel byli tak laskavi a podrobně mi vysvětlili, co zjistili, když se snažili dešifrovat Archimedův palimpsest. Zvláštní dík patří Lauře Garbolinové, která mi zajistila zásadní a vzácné materiály k dějinám matematiky. Rovněž děkuji oddělením zvláštních sbírek Univerzity Johna Hopkinse, Chicagské univerzity a Francouzské národní knihovny v Paříži za vyhledání některých vzácných rukopisů.

Stefanu Casertanovi vděčím za podporu u obtížných překladů z latiny; Elizabeth Fraserové a Jill Lagerstromové za jejich neocenitelnou pomoc (vždy s úsměvem) s bibliografií a jazykovými problémy.

Zvláštní dík patří Sharon Toolanové za její profesionální pomoc s přípravou rukopisu k tisku a Ann Feildové, Kristě Wildtové a Stacey Bennové za nákres některých obrázků.

Každý autor by měl považovat za své štěstí, jestliže se mu bude dostávat od jeho drahé polovičky tak nepřetržité podpory kombinované s trpělivostí, jakou mi při dlouhém psaní knihy poskytovala má žena Sofie.

Nakonec bych rád poděkoval své agentce Susan Rabinerové, bez jejíhož povzbuzování by tato kniha nikdy nevznikla. Jsem vděčen také redaktorovi Bobu Benderovi za pečlivé pročítání rukopisu a bystré poznámky; Johanně Liové za neocenitelnou podporu při produkci knihy, Lorettě Dennerové a Amy Ryanové za redigování textu, Victorii Meyerové a Katie Grinchové za propagaci a celému výrobnímu a marketingovému týmu nakladatelství Simon & Schuster za veškerou jejich usilovnou práci.

KAPITOLA PRVNÍ

ZÁHADA

Před pár lety jsem měl přednášku na Cornellově univerzitě. Na jedné ze stránek mé prezentace v PowerPointu stálo: „Je Bůh matematik?“ Jakmile se tahle stránka objevila, slyšel jsem, jak jeden student v přední řadě zalapal po dechu: „Proboha, doufám, že ne!“

Svou řečnickou otázkou jsem nezamýšlel podniknout filozofický pokus o definování Boha, ani v tom nebyl zlomyslný záměr vyděsit v auditoriu ty, kdo mají z matematiky hrůzu. Pouze jsem poukázal na záhadu, s níž po staletí zápasily některé z nejoriginálnějších mozků na světě – na zjevnou všudypřítomnost a všemohoucnost matematiky. To jsou totiž vlastnosti, které se obvykle pojí pouze s božstvím. Britský fyzik James Jeans (1877–1946) jednou prohlásil: „Vesmír vypadá, jako by byl navržen čistým matematikem.“[1] Matematika se zdá být až příliš dobrá nejen v popisu a vysvětlování celého kosmu, ale i některých vysoce chaotických lidských aktivit.

Ať se fyzikové snaží formulovat teorie vesmíru, akcioví analytici si lámou hlavu s předpověďmi příštího krachu na trhu, neurobiologové sestavují modely mozkových funkcí nebo se vojenští zpravodajští statistici pokoušejí optimalizovat alokaci zdrojů, všichni používají matematiku. A navíc, i když všichni aplikují formální systémy vyvinuté různými matematickými obory, vždy mají na mysli tutéž globální a stejnorodou matematiku. Čím to vlastně je, že matematika vládne tak ohromnými schopnostmi? Či řečeno s Einsteinem: „Jak je možné, že matematika, produkt lidského myšlení *nezávislý na zkušenosti* [zvýraznil autor], tak skvěle odpovídá objektům fyzikální reality?“[2]

Onen pocit naprosté nevysvětlitelnosti není žádnou novodobou záležitostí. Již někteří filozofové starověkého Řecka, zejména Pythagoras a Platón, stáli v úžasu nad tím, jakou má matematika moc formovat a řídit vesmír a zároveň, jak se jim alespoň zdálo, se vymyká možnostem lidí ji měnit, usměrňovat nebo ovlivňovat. Svůj obdiv k matematice nedokázal skrýt ani anglický politický filozof Thomas Hobbes (1588–1679). V díle *Leviathan*, působivém výkladu principů fungování společnosti a vlády, Hobbes prohlásil geometrii za vzor racionální argumentace:

> Vidíme-li tedy, že pravda záleží ve správném uspořádání slov našeho výroku, musíme mít při hledání přesné pravdy nutně na paměti, co každé užívané slovo znamená, a podle toho je také správně klást na místo. Jinak shledáme, že jsme se zapletli do slov, jako se pták chytne na větvičku namazanou lepem a čím usilovněji se snaží vyplést, tím více se lepí. A proto v geometrii, vědě snad jediné, která se Bohu tak zalíbila, že ji ráčil dát lidem, začíná se tím, že se přesně vymezuje význam jejích slov. Oni tomu vymezování říkají definice a kladou je na začátek svého počítání.[3]

Tisíciletí impozantního matematického bádání a učených filozofických spekulací na záhadu úžasné moci matematiky příliš mnoho světla nevrhla. Celé mysterium se dokonce v určitém smyslu spíše prohloubilo. Známý matematický fyzik z Oxfordu Roger Penrose zde už například spatřuje ne jednu, ale hned trojí záhadu. Penrose rozeznává tři různé „světy": *svět našeho vědomého vnímání, fyzický svět a platónský svět matematických forem.*[4] V prvním světě se odehrávají všechny naše mentální vjemy a představy – vnímáme zde tváře našich dětí, kocháme se úžasnými západy slunce nebo reagujeme na hrůzné obrazy válek. Je to také svět, v němž se vyskytuje láska, žárlivost i předsudky, stejně jako vnímání hudby, vůně jídel nebo strach. Druhý svět je ten, o němž běžně mluvíme jako o hmotné realitě. Přebývají v něm skutečné květiny, tabletky aspirinu, bílá oblaka nebo letadla, ale také galaxie, planety, atomy, srdce paviánů a mozky lidí. Platónský svět matematických forem, podle Penrose svět zcela skutečný stejně jako svět fyzický a mentální, je vlastí matematiky. Nacházejí se v něm přirozená čísla 1, 2, 3, 4, ..., všechny tvary, postuláty a věty eukleidovské geometrie, Newtonovy zákony pohybu, teorie strun, teorie katastrof nebo matematické modely chování akciového trhu. A nyní, říká Penrose, docházíme k oněm třem záhadám. Zaprvé, svět hmotné reality se podle všeho řídí zákony, které ve skutečnosti sídlí ve světě matematických forem. Právě to je hádanka, která Einsteina tak mátla. Stejně zmatený tím byl i držitel Nobelovy ceny za fyziku Eugene Wigner (1902–1995):[5]

> Zázrak toho, jak se jazyk matematiky přesně hodí k formulaci fyzikálních zákonů, je úžasný dar, který nechápeme ani si jej nezasluhujeme. Měli bychom za něj být vděčni a doufat, že přetrvá i ve světle budoucího výzku-

mu a že, k naší radosti, i když možná i k našemu údivu, zahrne široké oblasti vědění.

Druhou záhadou je, že samým vnímajícím myslím, v nichž sídlí naše vědomé vnímání, se nějak podařilo vzniknout z fyzického světa. Jak vlastně se *mysl* zrodila z *hmoty*? Budeme někdy schopni zformulovat teorii fungování vědomí, která by byla stejně soudržná a přesvědčivá, jako je nyní řekněme teorie elektromagnetismu? Kruh je nyní záhadně uzavřen. Vnímající mysli nějakým zázrakem získaly přístup k matematickému světu tím, že objevily, nebo vytvořily a zformulovaly celou pokladnici abstraktních matematických forem a konceptů.

Penrose pro žádné z těchto tří tajemství vysvětlení nenabízí a pouze lakonicky uzavírá: „Není pochyb, že ve skutečnosti neexistují tři světy, ale jen *jeden*, jehož pravou povahu ovšem v současnosti nedokážeme ani zahlédnout." To je mnohem pokornější přiznání než odpověď školního ředitele ve hře *Forty Years On* (Čtyřicet let poté) od anglického dramatika Alana Bennetta na otázku v zásadě obdobnou:

Foster: Ohledně Svaté Trojice mám stále trochu nejasno, pane.

Ředitel: Tři v jednom, jeden ve třech, naprosto jasné. Máte-li s tím nějaké problémy, obraťte se na učitele matematiky.

Celá hádanka je však ještě zamotanější, než jak jsem ji teď nastínil.

Úspěch matematiky ve vysvětlování světa kolem nás, který Wigner nazval „nepochopitelnou účinností matematiky", má vlastně dvě stránky, jednu překvapivější než druhou. Předně zde funguje aspekt, který by se dal označit termínem „aktivní". Když fyzikové bloudí labyrintem přírody, svítí si na cestu matematikou – nástroje, které používají a rozvíjejí, modely, jež tvoří, a vysvětlení, která vyvozují, to všechno je svou povahou matematické. To už samo o sobě vypadá na první pohled jako zázrak. Newton pozoroval padající jablko, Měsíc a příliv s odlivem na plážích, nikoli matematické rovnice. Ze všech těchto přírodních jevů však nějakým způsobem dokázal vytěžit jasné, zhuštěně podané a neuvěřitelně přesné matematické zákony přírody. Když skotský fyzik James Clerk Maxwell (1831–1879) rozšířil rámec klasické fyziky tak, aby zahrnovala všechny elektrické a magnetické jevy známé v 60. letech 19. století, uskutečnil to pomocí pouhé čtveřice matematických rovnic. Chvíli se nad tím zamysleme. Výklad celého souboru výsledků experimentů s elektromagnetismem a světlem, jejichž popisy v té době zabíraly celé svazky, se zhustil do čtyř krátkých rovnic. Ještě větší ohromení budí Einsteinova obecná teorie relativity – je to dokonalý příklad mimořádně přesné a vnitřně bezesporné matematické teorie něčeho tak fundamentálního, jako je struktura prostoru a času.

Záhadná efektivnost matematiky má však také svou „pasivní" stránku a ta je tak překvapivá, že vedle ní význam „aktivního" aspektu bledne. Koncepty a vztahy, které matematici zkoumají pouze z touhy po čistém poznání – zcela bez záměru je jakkoli využít – se o desítky let později vynořují jako nečekaná řešení problémů zakotvených ve hmotné skutečnosti! Jak je to možné? Vezměme si za příklad docela zábavný případ excentrického britského matematika Godfreye Harolda Hardyho (1877–1947). Hardy byl tak hrdý na to, že jeho práce nesestává z ničeho jiného než z čisté matematiky, že důrazně prohlašoval: „Žádný můj objev nepřinesl a pravděpodobně ani nepřinese do každodenního světa a života ani to nejmenší, přímo ani nepřímo a ať chceme nebo ne."[6] Uhodneme asi, že se mýlil. Jeden z jeho objevů se stal později součástí Hardyho-Weinbergova zákona (pojmenovaného podle Hardyho a německého fyzika Wilhelma Weinberga [1862–1937]), základního principu využívaného genetiky ke studiu vývoje populací.[7] Hardyho-Weinbergův zákon jednoduše řečeno stanoví, že pokud se rozsáhlá populace páří zcela náhodně (a nedochází k migraci, mutacím ani selekci), pak genetická skladba zůstává v každé generaci stále stejná. Dokonce i Hardyho zdánlivě zcela abstraktní práce na teorii čísel – výzkum vlastností přirozených čísel – nalezla nečekané využití. Britský matematik Clifford Cocks[8] v roce 1973 uplatnil teorii čísel k průlomu v kryptografii, tedy k vývoji kódů a šifer. Cocksovým objevem bylo překonáno i další Hardyho tvrzení. Ve své proslulé knize *Obrana matematikova* z roku 1940 Hardy prohlásil: „Nikdo ještě neobjevil sebemenší vojenský účel, jemuž by posloužila teorie čísel." Hardy se ale i zde zcela mýlil. Kódy a šifry jsou pro armádní spojení naprostou nezbytností. Takže i Hardy, jeden z nejhlasitějších kritiků aplikované matematiky, byl „zatažen" (kdyby byl naživu, jistě by se bránil zuby nehty) do tvorby prakticky užitečných matematických teorií.

To je ovšem jen vrcholek ledovce. Kepler a Newton objevili, že planety naší sluneční soustavy se pohybují po oběžných drahách tvarů elips – právě těch křivek, které před dvěma tisíciletími studoval řecký matematik Menaichmos (380–320 př. n. l.). Ukázalo se, že nové typy geometrie, které v klasické přednášce z roku 1854 nastínil Georg Friedrich Bernhardem Riemann (1826 až 1866), byly přesně těmi nástroji, které Einstein potřeboval k vysvětlení struktury kosmu. Matematický „jazyk“ zvaný teorie grup, který vyvinul geniální mladík Évariste Galois (1811–1832) jen proto, aby určil řešitelnost algebraických rovnic, se dnes stal jazykem, který dnes používají fyzikové, inženýři, jazykovědci a dokonce i antropologové k popisu veškerých symetrií, které ve světě existují.[9] Koncept matematické symetrie navíc v určitém smyslu postavil celý vědecký postup na hlavu. Cesta k porozumění kosmu vedla po staletí od shromažďování experimentálních nebo pozorování získaných faktů, z nichž se metodou pokusu a omylu vědci pokoušeli dedukovat obecné zákony přírody. Vědecký postup tak začínal dílčími pozorováními a kousek po kousku z nich sestavoval celou skládačku. Když se ve 20. století zjistilo, že v základech struktury subatomárního světa spočívají dobře definované matematické formy, začali současní fyzikové dělat přesný opak. *Nejprve* vytyčili matematické principy symetrie v přesvědčení, že fyzikální zákony a určitě i základní stavební kameny hmoty by měly sledovat určité vzory, a poté z těchto předpokladů odvodili obecné zákony. Jak příroda ví, že se musí řídit abstraktními matematickými symetriemi?

V roce 1975 si mladý matematický fyzik z Národní laboratoře v Los Alamos Mitch Feigenbaum hrál se svou kalkulačkou HP-65. Zkoumal chování jedné jednoduché rovnice. Povšiml si, že sled čísel, které se na displeji objevovaly, se stále více blížil jednomu konkrétnímu číslu: 4,669... Když se zaměřil na další rovnice, ke svému úžasu zjistil, že totéž zvláštní číslo se objevuje vždy znovu. Feigenbaum brzy usoudil, že objevil něco univerzálního, co nějakým způsobem označuje přechod od řádu k chaosu, třebaže žádné vysvětlení pro to neměl.[10] Fyzikové se k tomu podle očekávání zpočátku stavěli velmi skepticky. Proč by koneckonců mělo stále totéž číslo charakterizovat chování zjevně dost odlišných systémů? Po šesti měsících odborného posuzování nebyla první Feigenbaumova studie na toto téma přijata k publikaci. Zanedlouho však experimenty prokázaly, že když se bude kapalné helium zespodu zahřívat, bude se chovat přesně tak, jak Feigenbaumovo univerzální řešení předpovídalo. Nebyl to jediný systém, o němž se zjistilo, že funguje tímto způsobem. Udivující Feigenbaumovo číslo se ukazovalo v přechodech od uspořádaného proudění kapaliny k turbulencím a dokonce i v chování vody kapající z kohoutku.

Seznam takovýchto „předjímání“, jimiž matematici anticipovali budoucí potřeby různých vědeckých disciplín, snad nebere konce. Jeden z nejpůsobivějších příkladů záhadné a nečekané souhry mezi matematikou a reálným (fyzickým) světem poskytuje příběh *teorie uzlů* – odvětví matematické topologie zabývající se uzly. Matematický uzel připomíná běžný uzel na provaze, jehož konce jsou spojeny dohromady. Matematický uzel je tedy prostě uzavřená křivka bez volných konců. Zajímavé je, že hlavním podnětem k vývoji matematické teorie uzlů byl nesprávný model atomu z 19. století. Jakmile byl tento model opuštěn – pouhá dvě desetiletí po svém zrodu – vyvíjela se teorie uzlů dál jako relativně okrajový obor čisté matematiky. Tato abstraktní disciplína však kupodivu najednou nalezla rozsáhlé moderní aplikace v oblastech sahajících od molekulární struktury DNA po teorii strun (pokus sjednotit subatomární svět s gravitací). K tomuhle pozoruhodnému příběhu se vrátím v kapitole 8, protože jeho cyklická historie je zřejmě nejlepší ukázkou toho, jak mohou některá odvětví matematiky vznikat z pokusů o vysvětlení hmotné skutečnosti a jak se poté usadí v abstraktní říši matematiky, jen aby se nakonec nečekaně vrátila ke svým původním kořenům.

OBJEVENA, NEBO VYTVOŘENA?

Již to, co jsme zde dosud nastínili, poskytuje pádné důkazy, že vesmír je buď ovládán matematikou, nebo přinejmenším umožňuje, aby byl matematikou analyzován. Jak si ukážeme, většina lidských aktivit, ne-li všechny, se zřejmě rovněž rodí z hluboce založených matematických schopností, a to i tam, kde bychom to očekávali nejméně. Podívejme se dejme tomu na příklad ze světa financí – Black-Scholesův vzorec oceňování opcí z roku 1973.[11] Black-Scholesův model získal svým tvůrcům Nobelovu cenu za ekonomii (Myronu Scholesovi a Robertu Carhartu Mertonovi; Fischer Black zemřel před udělením ceny). Klíčová rovnice modelu umožňuje pochopit oceňování akciových opcí (opce jsou finanční instrumenty, které svým vlastníkům poskytují možnost koupit nebo prodat v budoucnu akcie za předem dohodnuté ceny). Jádrem modelu je fenomén, který fyzikové studovali po celá desetiletí – Brownův pohyb, stav rozvířeného pohybu drobných částic, například pylu ve vodě nebo částic kouře ve vzduchu. Ovšem úplně stejná rovnice platí také pro pohyb statisíců hvězd ve hvězdokupách. Není to snad, slovy *Alenky v říši divů*, „divoucnější a divoucnější“? Koneckonců, přes všechno, co se může dít ve vesmíru, jsou obchod a finance rozhodně světy vytvořené pouze lidmi.

Nebo si vezměme problém, s nímž se běžně setkávají výrobci desek plošných spojů a návrháři počítačů. K vyvrtání desítek tisíců děr do svých desek používají laserové vrtačky. K minimalizaci nákladů potřebují, aby se jejich vrtačky nechovaly jako „náhodně pobíhající turisté“. Jejich úkolem je nalézt nejkratší „trasu“ mezi děrami, a to tak, aby vrtačka navštívila každé místo určené pro díru přesně jednou. Jak však víme, matematici právě tento problém, jemuž se říká *problém obchodního cestujícího*, studovali od 20. let 20. století.[12] V podstatě v něm jde o to, že obchodník nebo politik se v rámci volební kampaně potřebuje mezi daným počtem měst přemístit co nejúspornějším způsobem a náklady na cestu mezi každou z dvojice měst jsou známy. Cestující pak musí nějakým způsobem zjistit nejlevnější trasu mezi všemi městy tak, aby se nakonec vrátil do místa, odkud vyrazil. Problém obchodního cestujícího byl v roce 1954 vyřešen pro 49 měst ve Spojených státech. Do roku 2004 již měl řešení pro 24 978 míst ve Švédsku. Jinými slovy, elektronický průmysl, přepravní firmy určující trasy pro dodávky s balíky a dokonce i japonští výrobci hracích strojů pačinko (do nichž je nutné zatlouct tisíce hřebíků), ti všichni se musí při vrtání, plánování cest nebo navrhování počítačů opírat o matematiku.

Matematika pronikla dokonce i do oblastí, které se obvykle s exaktními vědami nespojují. Existuje například periodikum *Journal of Mathematical Sociology* (má již za sebou více než 30 ročníků), který se orientuje na matematické analýzy složitých společenských struktur, organizací a neformálních skupin. Články v časopise se týkají témat sahajících od matematických modelů předpovídání veřejného mínění po předpovědi interakcí ve společenských skupinách.

Když to vezmeme z druhé strany – od matematiky ke společenským vědám – narazíme zejména na obor počítačové lingvistiky. V něm zpočátku pracovali výlučně počítačoví vědci, avšak nyní se stal interdisciplinární vědeckou disciplínou, která seskupuje lingvisty, kognitivní psychology, logiky a experty na umělou inteligenci ke společnému studiu spletitých aspektů přirozeně vzniklých jazyků.

Líčí se tu snad na nás nějaká škodolibá lest, tak aby veškeré lidské snahy o pochopení a poznání vedly k odhalování stále jemnějších a rafinovanějších zákrutů matematiky, na jejímž základě byl stvořen vesmír a my, jeho složité výtvory? Je snad matematika, jak pedagogové s oblibou říkají, něco jako schovaná učebnice – kniha, z níž učí pan profesor, ovšem svým studentům předkládá jen její velmi okleštěnou verzi, aby vypadal tím chytřeji? Nebo, abychom použili biblickou metaforu, je snad matematika v určitém smyslu slova tím hlavním ovocem stromu poznání?

Jak jsme na počátku kapitoly stručně poznamenali, nepochopitelná účinnost matematiky vytváří řadu překvapivých hádanek: je snad matematika nadána existencí zcela nezávislou na lidské mysli? Jinými slovy, je to snad tak, že matematické pravdy pouze *objevujeme*, tak jako astronomové objevují dosud nepoznané galaxie? Nebo naopak matematika není ničím jiným než lidským *výtvorem*? Pakliže matematika opravdu existuje v nějaké abstraktní platónské říši, jaký je vztah mezi tímto tajemným světem a hmotnou skutečností? Jak lidský mozek se všemi svými známými nedokonalostmi získává přístup k onomu neměnnému světu, který leží mimo čas a prostor? A na druhé straně, pokud je matematika čistě lidský výtvor a mimo naši mysl neexistuje, jak potom můžeme vysvětlit skutečnost, že vynález tolika matematických pravd tak zázračně předjímal otázky o vesmíru a lidském životě, které nebyly nastoleny ještě ani řadu staletí poté? Zodpovědět tyto hádanky není vůbec snadné. Jak si zde na řadě míst ukážeme, ani dnešní matematici, kognitivní vědci a filozofové se na odpovědích neshodnou. Francouzský matematik Alain Connes, nositel dvou nejprestižnějších matematických ocenění, Fieldsovy medaile (za rok 1982) a Crafoordovy ceny (2001), v roce 1989 vyjádřil své názory velmi jasně:

> Podívejme se například na prvočísla, která jsou podle mého názoru stabilnější realitou, než je hmotná skutečnost kolem nás. Matematika můžeme přirovnat k průzkumníkovi, který se vydává objevovat nové světy. Člověk objevuje základní fakta na základě zkušenosti. Pomocí jednoduchých výpočtů si například uvědomí, že prvočíselná řada zřejmě pokračuje donekonečna. Prací matematika pak je prokázat, že skutečně existuje nekonečné množství prvočísel. To je samozřejmě díky Eukleidovu důkazu dávno známo. Jedním z nejzajímavějších důsledků tohoto důkazu je, že když bude někdo jednoho dne tvrdit, že našel nejvyšší prvočíslo, bude snadné dokázat, že se mýlí. Totéž platí pro jakýkoli důkaz. Máme tedy co dělat s realitou naprosto stejně nespornou, jako je ta hmotná.[13]

Martin Gardner, známý autor celé řady textů z oblasti zábavné matematiky, se rovněž kloní k chápání matematiky jako *objevování*. Podle něj není sporu o tom, že čísla a matematika jsou nadány vlastní existencí, ať o tom lidé vědí, nebo ne. Jednou vtipně podotkl: „Kdyby se ke dvěma dinosaurům na louce připojili další dva, byli by tam čtyři, i kdyby to žádný člověk nepozoroval a ty potvory byly příliš pitomé na to, aby to věděly.“[14] Jak zdůrazňoval Connes, zastánci pohledu „matematika jako objevování“ (který, jak uvidíme v kapitole 2, odpovídá platónskému pohledu) poukazují na to, že jakmile byl jakýkoli matematický koncept pochopen a osvojen, jako například přirozená čísla 1, 2, 3, 4, ..., pak jsme už stáli před nepopiratelnými fakty typu $3^2 + 4^2 = 5^2$, a to bez ohledu na to, co si o tom myslíme. Přinejmenším to působí dojmem, že se tu setkáváme se skutečně existující realitou.

Jiní s tím nesouhlasí. Britský matematik Michael Atiyah (který získal Fieldsovu medaili za rok 1966 a Abelovu cenu v roce 2004) v recenzi Connesovy knihy poznamenal:

> Každý matematik musí s Connesem sympatizovat. Všichni z nás cítí, že celá čísla nebo kružnice v určitém abstraktním smyslu opravdu existují a platónský názor je mimořádně svůdný. Můžeme se však za něj skutečně postavit a hájit ho? Kdyby byl vesmír jednorozměrný, nebo dokonce nespojitý, těžko si lze představit, jak by se mohla rozvinout geometrie. Může se zdát, že s celými čísly stojíme na pevnější půdě a že počítání je vskutku něco prapůvodního. Představme si však, že by inteligence nepřebývala v lidech, ale v nějaké obrovské, osamocené a izolované medúze, ponořené v hlubinách Tichého oceánu. Ta by se nikdy nesetkala s jednotlivými objekty a znala by pouze vodu, která ji obklopuje. Jejími základními smyslovými údaji by byl pohyb, teplota a tlak. V takovém čistém kontinuu by nemohla vzniknout nespojitost, a neexistovalo by tak nic, co by se dalo počítat.[15]

Atiyah se proto domnívá, že „člověk *stvořil* [zvýraznil autor] matematiku idealizací a abstrakcí jevů fyzického světa“. Lingvista George Lakoff a psycholog Rafael Núñez mají stejný názor. Ve své knize *Where Mathematics Comes From* (Odkud pochází matematika) dospívají k závěru: „Matematika je přirozenou součástí lidské existence. Vychází z našich těl a mozků a z našich každodenních zkušeností se světem.“

Atiyahovo, Lakoffovo a Núñezovo stanovisko vyvolává další zajímavou otázku. Pokud je matematika výhradně lidským výtvorem, je potom skutečně univerzální? Jinak řečeno, kdyby existovaly mimozemské inteligentní civilizace, vypracovaly by si tutéž matematiku jako my? Carl Sagan (1934–1996) byl toho názoru, že odpověď na poslední otázku je kladná. V knize *Kosmos*, v pasáži, kde rozebíral, jaký typ signálů by inteligentní civilizace mohla vysílat do vesmíru, Sagan uvedl: „Je mimořádně nepravděpodobné, že by nějaký přírodní fyzikální proces mohl přenášet rádiové zprávy obsahující jen prvočísla. Kdybychom takovou zprávu obdrželi, mohli bychom z toho vyvodit, že existuje civilizace, která zná alespoň prvočísla.“[16] Avšak do jaké míry je to pravděpodobné? Matematický fyzik Stephen Wolfram ve své nedávné knize *A New Kind* *of Science* (Nový typ vědy) tvrdí, že to, co nazýváme „naší matematikou", je možná jen jednou možností z široké škály různých typů a „vůní" matematiky. Tak kupříkladu namísto toho, abychom k popisu přírody používali pravidla založená na matematických rovnicích, mohli bychom uplatňovat jiné typy pravidel, ztělesněných třeba v jednoduchých počítačových programech. Někteří kosmologové zase v poslední době diskutují o tom, zda náš vesmír není jen jedním z členů *multiverza* – ohromného souboru jednotlivých vesmírů. Pokud takové multiverzum skutečně existuje, je opravdu reálné očekávat, že ostatní vesmíry budou mít stejnou matematiku jako ten náš?

Molekulární biologové a kognitivní vědci vnášejí do hry další perspektivu, která je založena na studiu schopností mozku. Pro některé z nich se matematika neliší příliš od jazyka. Jinými slovy, podle tohoto „kognitivního" scénáře vznikla například abstraktní definice čísla 2 poté, co lidé statisíce let zírali na své dvě ruce, dvě oči nebo dvě prsa, stejně jako slovo „pták" se stalo označením pro mnohé dvoukřídlé živočichy, kteří umějí létat. Francouzský neurovědec Jean-Pierre Changeux to vyjádřil takto: „Podle mě je axiomatická metoda [používaná například v eukleidovské geometrii] vyjádřením schopností spojených s používáním lidského mozku. To, co charakterizuje jazyk, je právě jeho tvořivý charakter."[17] Pokud je však matematika pouze dalším jazykem, jak vysvětlíme, že mnohé děti, které se snadno učí jazykům, mají takové potíže se studiem matematiky? Skotské zázračné dítě Marjory Flemingová (1803 až 1811)[18] roztomile popsala, na jaké obtíže žáci v matematice narážejí. Děvče, které se nedožilo devátých narozenin, po sobě zanechalo deníky s více než devíti tisíci slovy prózy a pěti sty řádky veršů. Na jednom místě si stěžuje: „Teď vám vypovím, jakou hrůzu a zoufalství mi působí násobilka; to si nikdo nedokáže představit. Nejstrašnější je 8 krát 8 a 7 krát 7; to snad nemůže vydržet ani sama příroda."

Ze složitých otázek, které jsme zde právě nastínili, si můžeme vybrat některé základní prvky a vyjádřit je jinou formou: je nějaký zásadní rozdíl mezi matematikou a jinými výtvory lidské mysli, jakými jsou například výtvarné umění nebo hudba? Pokud ne, proč právě matematika vykazuje tak imponující logickou soudržnost a bezespornost, jaká zjevně u žádného jiného lidského výtvoru neexistuje? Eukleidovská geometrie kupříkladu zůstává dnes stejně správná (tam, kde je možné ji použít) jako kolem roku 300 př. n. l; představuje „pravdy", které nám jsou v podstatě vnuceny, ať se nám to líbí nebo ne. Naproti tomu nás dnes nic nenutí poslouchat hudbu, kterou poslouchali staří Řekové, ani nemusíme zastávat Aristotelův naivní model kosmu.