Finanční matematika pro každého

8. rozšířené vydání

J. Radová, P. Dvořák, J. Málek

věcné a matematické vysvětlení základních finančních pojmů

metody pro praktické rozhodování soukromých osob i podnikatelů

nové finanční produkty

výborná učebnice pro studenty středních a vysokých škol

řešené praktické příklady

finance

GRADA

Finanční matematika pro každého

8. rozšířené vydání

J. Radová, P. Dvořák, J. Málek

Grada Publishing

Edice Osobní a rodinné finance

doc. RNDr. Jarmila Radová, Ph.D., doc. Ing. Petr Dvořák, Ph.D.,
doc. Mgr. Jiří Málek, Ph.D.

Finanční matematika pro každého
8. rozšířené vydání

TIRÁŽ TIŠTĚNÉ PUBLIKACE:

Vydala GRADA Publishing, a.s.
U Průhonu 22, Praha 7,
jako svou 5287. publikaci

Realizace obálky Jan Dvořák
Foto na obálce Allphoto.cz
Sazba Antonín Plicka
Odpovědná redaktorka Ing. Michaela Průšová
Počet stran 304
Osmé vydání, Praha 1993, 1997, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2013
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a.s.

ISBN 978-80-247-4831-3

ELEKTRONICKÉ PUBLIKACE:

ISBN 978-80-247-8721-3 (ve formátu PDF)

GRADA Publishing: *tel.: 234 264 401, fax: 234 264 400, www.grada.cz*

Obsah

Předmluva

I osmé, rozšířené vydání *Finanční matematiky pro každého* se drží osvědčených principů, na kterých byla založena vydání předchozí. To znamená, že srozumitelným způsobem vysvětluje základní matematické postupy využívané v bankovní a finanční praxi širokému okruhu čtenářů.

Knížka se snaží důsledně naplnit to, že by měla být určena skutečně *pro každého*, kdo se z jakéhokoliv důvodu zajímá o finanční matematiku. Nabízí proto jak spolehlivého průvodce při prvních krocích do tajů finančních výpočtů, aniž musí čtenář mít rozsáhlé matematické či ekonomické znalosti, tak může být i cenným rádcem profesionálovi při objasnění matematického zákulisí finančních produktů a investování.

Je koncipována jako učebnice a vychází ze zkušeností autorů při výuce na Vysoké škole ekonomické v Praze. Je proto vhodná pro studenty vysokých, vyšších odborných či středních škol s ekonomickým zaměřením. Snadno se v ní však budou orientovat i ti, kteří si budou chtít doplnit v dnešní době nezbytné znalosti samostudiem.

Obsah knížky je možné rozdělit do dvou celků. První, kapitoly 1 až 6, vysvětluje matematické metody a postupy, které jsou využívány v oblasti financí. Druhý celek, kapitoly 7 až 18, je potom zaměřen na konkrétní aplikace těchto postupů u všech důležitých bankovních a finačních produktů.

Výklad v jednotlivých kapitolách je nejdříve veden v obecné rovině, následně je demonstrován na praktickém příkladě, který je doprovázen i vzorovým řešením.

Pro rychlou orientaci a snadné hledání odpovědi na určitou otázku obsahuje knížka podrobný věcný rejstřík.

Věříme, že Finanční matematika pro každého poskytne každému, kdo ji otevře, zajímavé informace, které využije při finančním rozhodování v podnikání či správě svých soukromých financí.

Srpen 2013 autoři

1. Základní pojmy

Finanční matematika není nic jiného než využití matematiky ve finanční oblasti. V textu se proto budeme setkávat s některými matematickými pojmy a postupy. Pro ty, kteří potřebují zopakovat základy matematiky, potřebné ve finanční matematice, je určena úvodní kapitola.

1.1 Procentový počet

Slovo **procento** je latinského původu a znamená setinu celku nebo základu.

Základem procentového počtu je skutečnost, že velikost dané veličiny neuvádíme absolutně v daných jednotkách, ale relativně (poměrně). To znamená, že uvedeme její poměr k velikosti odpovídající veličiny (vyjádřené ve stejných jednotkách), kterou jsme zvolili za základ.

Pro jedno procento potom platí:

$$1\,\% = \frac{1}{100},$$

tzn. jedno procento je jedna setina ze základu = 0,01 základu; potom:

$100\,\% = 1$ celek = celý základ.

V jednoduchých úlohách s procenty se objevují tři základní veličiny:

- základ (budeme označovat z);
- počet procent (budeme označovat p);
- procentová část, která je vyjádřením části, odpovídající počtu procent v absolutních jednotkách (budeme označovat x).

Při výpočtu známe dva údaje a třetí údaj počítáme. Podle toho rozlišujeme tři základní typy úloh:

1. výpočet procentové části x;
2. výpočet základu z;
3. výpočet počtu procent p.

Výpočet neznámé v jednotlivých typech úloh provádíme podle následujících vzorců:

$$x = z \cdot \frac{p}{100}, \tag{1-1}$$

$$z = \frac{x \cdot 100}{p}, \tag{1-2}$$

$$p = \frac{x \cdot 100}{z}, \tag{1-3}$$

kde x je procentová část;
z je základ;
p je počet procent.

Jednou z možností výpočtu neznámého údaje v úlohách s procenty je i použití úměry neboli trojčlenky.

Příklad 1-1 *Výpočet procentové části*

Kolik činí sjednaný podíl na zisku ve výši 15 % z prodejní ceny, má-li výrobní cena výši 2 000 Kč a prodejní cena činí 115 % výrobní ceny?

Řešení

Nejprve vypočítáme, jak vysoká byla prodejní cena. To je problém výpočtu procentové části podle vztahu (1-1). Dosadíme z = 2 000, p = 115 %. Potom:

$$x = z \cdot \frac{p}{100} = 2\,000 \cdot \frac{115}{100} = 2\,300.$$

Prodejní cena činila 2 300 Kč.

Nyní potřebujeme zjistit, kolik činí podíl na zisku ve výši 15 % z prodejní ceny. Opět počítáme procentovou část. Nyní dosadíme p = 15 %, z = 2 300:

$$x = z \cdot \frac{p}{100} = 2\,300 \cdot \frac{15}{100} = 345.$$

Zisk činí 345 Kč.

Příklad 1-2 *Výpočet základu v procentovém počtu*

Daň z příjmu činila při sazbě daně 27,5 % částku 1 170 Kč. Jak vysoký byl příjem (od odpočitatelných položek abstrahujeme)?

Řešení

Kromě výše uvedených vzorců je možno použít trojčlenku:

27,5 % odpovídá 1 170 Kč;
100 % odpovídá z Kč.

Sestavíme rovnost:

$$\frac{z}{1170} = \frac{100}{27{,}5};$$

$$z = \frac{100}{27{,}5} \cdot 1170 = 4\,254{,}54.$$

Hrubý příjem činil 4 255 Kč.

1.2 Funkce

Dříve, než budeme zjednodušeně definovat pojem funkce, seznámíme se s pojmem **proměnná.** Jestliže říkáme, že celková cena zboží závisí na jeho množství, pak proměnné jsou množství a celková cena, konstanta (konstantní veličina) je cena za jednotkové množství. Označíme-li celkovou cenu y, množství zboží x a cenu za jednotkové množství c, pak x, y jsou v tomto případě proměnné a c je konstanta.

Funkcí budeme rozumět předpis, kterým jednoznačně přiřadíme určité hodnotě proměnné x určitou hodnotu proměnné y. Píšeme potom:

$$y = f(x).$$

Proměnnou x nazýváme **nezávisle proměnná** a proměnnou y nazýváme **závisle proměnná.** Hodnota proměnné y závisí na hodnotě proměnné x.

Máme-li např. cenu za 1 kg banánů 28 Kč, pak celková cena nakoupeného množství banánů bude záviset právě na hmotnosti banánů, které nakoupíme.

Podle výše uvedeného příkladu bude tedy hmotnost zboží x nezávisle proměnná a celková cena y závisle proměnná.

Funkce bude mít v tomto jednoduchém případě tvar:

$$y = 28 \cdot x.$$

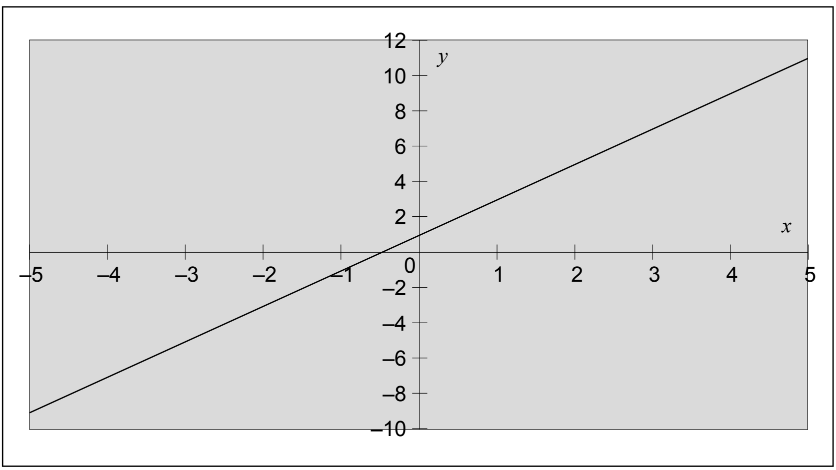
V našem textu se setkáme s několika funkcemi, které si nyní dále popíšeme, neboť nám budou později užitečné.

1.2.1 Lineární funkce

Funkční předpis pro lineární funkci bude mít tvar:

$$y = k \cdot x + q, \tag{1-4}$$

kde k, q jsou konstanty;
x je nezávisle proměnná;
y je závisle proměnná.



Obrázek 1.1 Graf lineární funkce $y = 2 \cdot x + 1$

Graficky je možno tuto funkci znázornit přímkou. Konstanta k určuje směr přímky a konstanta q určuje průsečík s osou y.

Lineární funkci můžeme ukázat třeba na příkladu poplatků za telefon. Paušální platba, nezávislá na počtu uskutečněných hovorů, je konstanta q, konstanta k je cenou za jeden impuls a nezávisle proměnnou x je počet uskutečněných impulsů. Závisle proměnná y je potom výše celkového poplatku za telefon.

V ekonomických úvahách se často užívá závislosti zvané **přímá úměrnost,** která je znázorněna právě lineární funkcí.

Říkáme, že dvě veličiny jsou přímo úměrné, jestliže podíl každých dvou odpovídajících si hodnot y_i / x_i je roven konstantě. Tedy:

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1} = k.$$

Funkční předpis je tedy dán vzorcem:

$$y = k \cdot x. \qquad \textbf{(1-5)}$$

Grafem je přímka, procházející počátkem (průsečíkem os x a y). Známe-li konstantu k, můžeme ke kterékoli hodnotě x_i vypočítat hodnotu y_i.

Předchozí příklad by byl přímou úměrností, jestliže by telefonní poplatky neobsahovaly paušální platbu.

1.2.2 Rovnoosá hyperbola

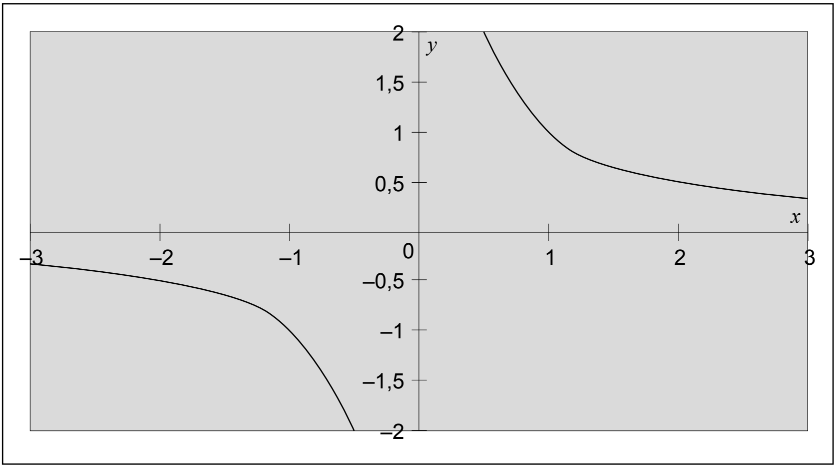
Dále se v ekonomických úvahách setkáváme se závislostí zvanou **nepřímá úměrnost.** Říkáme, že dvě veličiny jsou nepřímo úměrné, jestliže součin každých dvou odpovídajících si hodnot x_i, y_i je roven konstantě. Tedy:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = k.$$

Funkční předpis je v tomto případě dán vzorcem:

$$y = \frac{k}{x}. \qquad \textbf{(1-6)}$$

Grafem nepřímé úměrnosti je hyperbola. V případě, že $k = 1$, se nazývá rovnoosá.



Obrázek 1.2 Graf rovnoosé hyperboly

V našem příkladu s telefony (bez paušální platby, tj. $q = 0$) jsme řekli, že celkový poplatek za telefon (y) je dán součinem ceny za jeden impuls (k) a počtu uskutečněných impulsů (x), to je:

$$\text{celkový poplatek } y = \text{cena impulsu } k \cdot \text{počet impulsů } x.$$

Celkový poplatek y je přímo úměrný ceně za jeden impuls k.

Pokud budeme však naopak znát celkový poplatek a cenu jednoho impulsu a budeme chtít zjistit počet uskutečněných impulsů, můžeme tak učinit dosazením do vzorce:

$$\text{počet impulsů} = \frac{\text{celkový poplatek}}{\text{cena za jeden impuls}}.$$

Vidíme, že počet impulsů je (při daném celkovém poplatku) nepřímo úměrný ceně za jeden impuls.

1.2.3 Exponenciální funkce

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci, kde nezávisle proměnná se vyskytuje jako exponent. To znamená, že ji můžeme psát ve tvaru:

$$y = a^x, \tag{1-7}$$

kde $a > 0$, x je racionální číslo[1].

Z matematiky víme, že každé reálné číslo[2] umocněné na nultou se rovná jedné. Z toho můžeme pro exponenciální křivky odvodit zajímavou vlastnost. Pro všechna a platí, že pro $x = 0$ se rovná $a^x = 1$. Z toho vyplývá, že všechny exponenciální křivky procházejí bodem (0,1), který leží na ose y.

Speciální průběh má exponenciální funkce, je-li a rovno jedné ($a = 1$). Pak pro všechna x platí, že y se rovná také jedné ($y = 1$), neboť číslo jedna umocněné na libovolné číslo je opět číslo jedna. Grafem je v tomto případě přímka rovnoběžná s osou x.

Funkční hodnoty exponenciální funkce y budou pro libovolné hodnoty proměnné x kladné.

Speciálním případem je funkce:

$$y = \mathbf{e}^x,$$

kde $\mathbf{e}$ představuje tzv. **Eulerovo číslo,** definované pomocí limity[3] jako:

$$\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n, \tag{1-8}$$

což budeme potřebovat v oddílu 3.9 při definici úrokové intenzity.

Exponenciální funkci použijeme v oddílu 3.1 při odvozování problematiky složeného úročení.

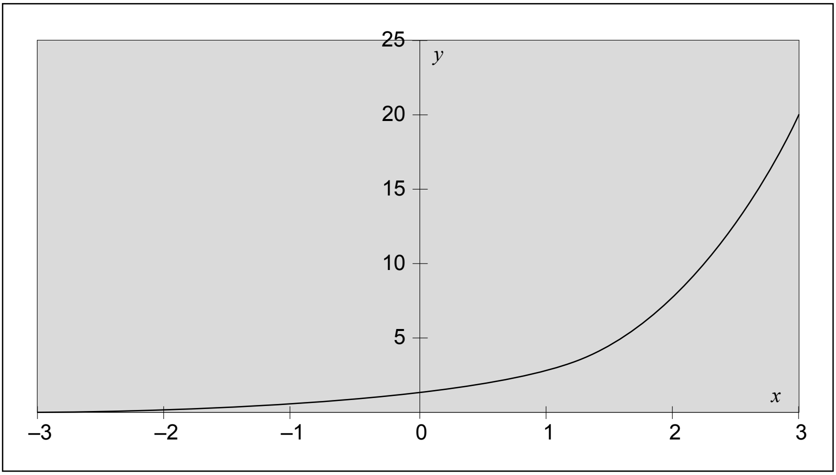
---

1 **Racionální číslo** je číslo, které je možno vyjádřit jako podíl dvou celých čísel. **Celá čísla** jsou čísla: … –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, … Celá kladná čísla nazýváme **přirozená čísla.**

2 **Reálné číslo** je jak číslo racionální, tak číslo, které není možno napsat ve tvaru podílu dvou celých čísel (**číslo iracionální**), např. $\sqrt{2}$.

3 Zde se jedná o limitu posloupnosti (viz oddíl 1.4).

Příklad exponenciální funkce je znázorněn grafem na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3 Graf exponenciální funkce $y = \mathrm{ex}$

1.2.4 Logaritmická funkce

Logaritmická funkce je funkcí inverzní k funkci exponenciální. Inverzní funkcí rozumíme funkci, kde původní závisle proměnná se stala nezávisle proměnnou a naopak. Logaritmickou funkci zapisujeme:

$$y = \log_a x, \tag{1-9}$$

kde nazýváme:

$x \in (0,\infty)$	číslo logaritmované;
$a \neq 1$	základ logaritmu;
y	logaritmus.

Logaritmus y je číslo, kterým když umocníme základ a, dostaneme logaritmované číslo x. To znamená, že platí:

$$a^y = x.$$

Hodnoty nezávisle proměnné x logaritmické funkce musejí být vždy kladné, neboť odpovídají hodnotám závisle proměnné exponenciální funkce, která je inverzní funkcí k funkci logaritmické. Jak jsme viděli, byly funkční hodnoty závisle proměnné exponenciální funkce vždy kladné.

Všechny logaritmické křivky analogicky jako křivky exponenciální procházejí pro všechny hodnoty a stejným bodem, který v případě logaritmických křivek leží na ose x, bodem (1,0).

Pro naše účely budeme užívat **přirozený logaritmus,** kde $a = \mathbf{e}$ a $\mathbf{e}$ je již zmíněné Eulerovo číslo.

Zapisujeme:

$$y = \log_{\mathbf{e}} x = \ln x.$$

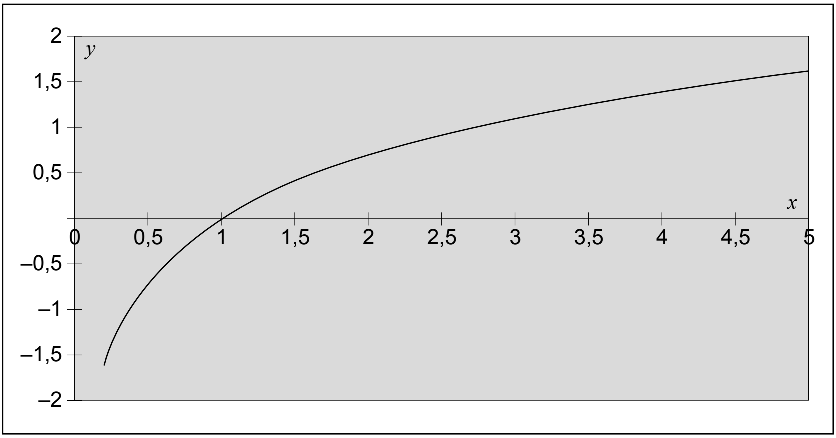
Je-li základ logaritmu a roven deseti (a = 10), hovoříme o **dekadickém logaritmu.** Pak píšeme:

$$y = \log_{10} x.$$

Tedy:

$$y = 10^{y}.$$

Průběh logaritmické funkce pro $a = \mathbf{e}$ je znázorněn grafem na obrázku 1.4.



Obrázek 1.4 Graf logaritmické funkce $y = \ln x$

Pro logaritmy platí pro libovolná čísla $u, v \in (0,\infty)$ a reálná čísla w následující základní vztahy:

$$\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v; \qquad \textbf{(1-10)}$$

$$\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v; \qquad \textbf{(1-11)}$$

$$\ln u^{w} = w \cdot \ln u. \qquad \textbf{(1-12)}$$

S logaritmickou funkcí se setkáme např. u již zmíněného složeného úročení, kdy známe konečnou (zúročenou) výši kapitálu, jeho výši počáteční a máme určit (při dané úrokové sazbě) dobu uložení.

1.3 Průměry

1.3.1 Aritmetický průměr

Aritmetický průměr m_a je pro n čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definován jako:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}. \qquad \textbf{(1-13)}$$

Zjednodušeně řečeno, aritmetický průměr získáme, když součet daných čísel vydělíme jejich počtem.

Jsou-li mezi danými čísly a_i některá čísla stejná, např. mějme:

n_1 čísel a_1,

n_2 čísel a_2,

:

n_r čísel a_r,

pak můžeme výpočet zjednodušit a jejich aritmetický průměr bude roven:

$$m_a = \frac{n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + \ldots + n_r \cdot a_r}{n_1 + n_2 + \ldots + n_r}, \qquad \textbf{(1-14)}$$

kde platí:

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r.$$

V tomto případě hovoříme o **váženém aritmetickém průměru.** Čísla $n_1, n_2, ..., n_r$ se označují jako váhy čísel $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

S aritmetickým průměrem se setkáme při výpočtu střední doby splatnosti více pohledávek.

1.3.2 Geometrický průměr

Vedle obecně známého aritmetického průměru existuje i průměr geometrický.

Pro n kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je geometrický průměr m_g definován jako:

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

neboli jednoduše řečeno jako n-tá odmocnina součinu n čísel.

Jsou-li mezi danými čísly a_i některá čísla stejná, např. mějme:

n_1 čísel a_1,

n_2 čísel a_2,

:

n_r čísel a_r,

pak vzorec pro jejich geometrický průměr můžeme opět zapsat jako:

$$m_g = \sqrt[n]{a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot a_r^{n_r}},$$

kde platí:

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r.$$

Číslo m_g se nazývá **vážený geometrický průměr.**

1.3.3 Vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

Lze dokázat, že pro sobě odpovídající průměry platí, že aritmetický průměr je větší než geometrický průměr.

Symbolicky můžeme tento vztah zapsat:

$m_a > m_g$.

Dokažme nyní, že aritmetický průměr je větší než geometrický, a to pro dvě kladná čísla a_1 a a_2. Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že platí opak, tedy že aritmetický průměr je menší než geometrický:

$m_a < m_g$.

To tedy znamená, že má platit vztah:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} < \sqrt{a_1 \cdot a_2},$$

který dále budeme upravovat:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 \cdot a_2} < 0,$$

$$a_1 + a_2 - 2 \cdot \sqrt{a_1 \cdot a_2} < 0,$$

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 < 0$$

a to není možné, neboť druhá mocnina každého nenulového čísla je větší než nula. Předpoklad, že aritmetický průměr je menší než geometrický, je tedy chybný a sporem jsme dokázali, že platí opak.

1.4 Posloupnosti a řady

Přiřadíme-li každému přirozenému (tj. celému kladnému) číslu n určité reálné číslo a_n, pak souhrn čísel a_1, a_2, … nazýváme **posloupnost**[4].

[4] Posloupnost může mít limitu (viz oddíl 1.2.3). Říkáme, že posloupnost má **limitu** rovnou číslu a, jestliže pro skoro všechna n bude absolutní hodnota rozdílu $a_n - a$ menší než jakkoli zvolené malé kladné číslo.