NOVÁ INFINITNÍ MATEMATIKA

KAROLINUM

II. Nová teorie množin a polomnožin

PETR VOPĚNKA

Nová infinitní matematika
II. Nová teorie množin a polomnožin

Petr Vopěnka

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum
www.cupress.cuni.cz
Redakce Lenka Ščerbaničová
Obálka Jan Šerých
Sazba Šárka Voráčová
Vydání první

ISBN 978-80-246-2986-5
ISBN 978-80-246-3228-6 (online : pdf)

Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum 2016

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Předmluva

V této knize je předvedena matematizace některých jevů v teorii, která je reakcí na iluzorní Cantorovu teorii množin. Tato teorie byla rozvíjena od poloviny sedmdesátých let dvacátého století především v Praze a v Bratislavě jako alternativa ke klasické teorii Cantorově. Dnes je ovšem tato původně alternativní teorie množin novou teorií množin a polomnožin, neboť není nic, čeho by mohla být alternativou.

Na veřejnosti se alternativní teorie množin poprvé objevila v knize *Mathematics in the Alternative Set Theory.*[1] Její překlad do ruštiny doplněný o dva dodatky vydalo nakladatelství Mir.[2] Podstatně rozšířena pak tato kniha vyšla slovensky pod názvem *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín.*[3] Překlad tohoto vydání do ruštiny s dodatkem od Pavola Zlatoše a s opravami N. V. Beljakina byl vydán v roce 2004.[4]

Poslední dvě ze shora uvedených knih obsahují též výsledky některých dalších členů týmu zkoumajícího alternativní teorii množin. Těmi z nich, kteří významně přispěli k rozvoji této teorie, jsou především (v abecedním pořadí) Karel Čuda, Josef Mlček, Alena Vencovská a Pavol Zlatoš.

V této knize ovšem tyto jejich výsledky, stejně jako mnohé další, uvedeny nejsou. Je tomu tak proto, že důsledné trvání na neaktualizovatelnosti oboru všech přirozených čísel kupodivu umožnilo zjednodušit řadu pojmů, a tedy i jazyka této teorie. Přepsat do nově zjednodušené podoby všechny dosažené výsledky a znovu posoudit účelnost některých z nich vyžaduje delší čas. Kromě toho použitelnost této nové teorie na infinitezimální kalkul otevřela množství lákavých možností jejího dalšího rozvoje.

[1] Petr Vopěnka (1979). *Mathematics in the Alternative Set Theory.* Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft.

[2] Petr Vopěnka (1983). *Matematika v alternativnoj teorii mnozestv.* Moskva: Izdateľstvo Mir.

[3] Petr Vopěnka (1989). *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín.* Bratislava: Vydavateľstvo Alfa.

[4] Petr Vopěnka (2004). *Aľternativnaja teorija množestv: novyj vzgljad na beskonecnosť.* Novosibirsk: Izdateľstvo Instituta matematiki.

Úvod

Neaktualizovatelnost oboru všech přirozených čísel neboli neexistence množiny všech těchto čísel má pro infinitní matematiku dvacátého století dalekosáhlé důsledky. Vyřazuje totiž ze hry jediného, Bolzanem nalezeného a dodnes nenahraditelného ručitele existence množiny všech přirozených čísel, jímž byl Bůh středověké a barokní rozumářské teologie. Nejde ale jen o samotnou existenci této množiny, ale především o to, že většina matematiků pracujících v teoriích opírajících se o Cantorovu teorii množin si při zacházení s nejrůznějšími předměty matematických studií též osvojila schopnosti tohoto božského pozorovatele.

Tomu pak odpovídal i vztah matematiků k nekonečnu, které před nimi leželo v aktuální podobě jako Adam před Bohem na Michelangelovu obrazu v Sixtinské kapli.

Nekonečno zůstalo, i když jeho božský pozorovatel a uskutečňovatel zmizel. Jsme vrženi do předmnožinové matematiky. Nejsme nad světem, ale ve světě. Nehledáme nekonečno v Boží mysli, ale ve světě.

Nekonečno, které hledáme, je především to, které je od pradávna přítomné v cestě na hranice světa, v němž pobýváme (popřípadě i kousek za ně). Narazíme na ně ve všech směrech, tedy nejen na cestě do dálky, ale i do mikrosvěta. Při tomto hledání se můžeme opírat o tisícileté poznatky a zkušenosti matematiky.

Nevstoupíme však do předmnožinové matematiky takové, jaká byla, když jsme ji opouštěli, ale vstoupíme do ní s odpovědí na následující otázku, kterou by si měl položit každý filosoficky uvažující matematik.

> Jak je možné, že některé poznatky klasické infinitní matematiky jsou použitelné v přirozeném reálném světě, a jiné nejsou použitelné dokonce ani při výkladech světa reálného?

Současná infinitní matematika je založena na Cantorově teorii klasických (rozumí se klasicky vykládaných) nekonečných množin (rozumí se nekonečných aktuálně). V přirozeném reálném světě[5] se však takové množiny nevyskytují, a nejsou to tedy ony, na něž infinitní matematika přenáší své poznatky.

Pokud jsou některé poznatky klasické infinitní matematiky nějak použitelné v přirozeném reálném světě, pak při výkladech neostrých[6] jevů tohoto světa. Tak

[5] Přirozeným reálným světem rozumíme v podstatě to prostředí, jehož jevy nazíráme. Reálným světem pak jakési vědou předpokládané rozšíření přirozeného reálného světa.

[6] Neostrost je jevem přirozeného reálného světa a měla by být zabudována i do světa reálného, pokud nechceme sklouznout do Descartova dualismu. Vykládáme-li totiž reálný svět jako ostře vymezený, pak nám nezbývá než neostrost prohlásit za jev subjektivní, který do objektivního reálného světa nepatří. Následkem toho jsme nuceni přiznat člověku duši, byť ne nutně nesmrtelnou, leč od reálného světa oddělenou. Je-li však člověk i se svým vnímáním součástí reálného světa, pak jeho součástí je i jev neostrosti. Přitom právě neostrost je jevem primárním; není to špatně zachycená ostrost. Naopak ostrost je ve většině případů idealizovanou neostrostí.

například řada poznatků o klasickém kontinuu je použitelná i při výkladu tvaru stolu stojícího před námi. Přitom i tvar tohoto stolu je kontinuum, avšak jiné než to, které zkoumá klasická infinitní matematika v topologii. Podobně poznatky z klasické infinitní teorie pravděpodobnosti či statistiky jsou použitelné při studiu neostře vymezeného množství ptactva nacházejícího se v daném roce koncem léta na území našeho státu, a stejně je tomu i v řadě dalších případů.

Řekneme-li, že takováto užití klasické infinitní matematiky v přirozeném reálném světě jsou jen přibližná, neboli že tyto jevy přirozeného reálného světa v klasické infinitní matematice toliko více či méně věrně modelujeme, nedáváme tím odpověď na shora položenou otázku. Pouze ji – přesněji jen její první část – převádíme do tvaru: jak je možné, že některé jevy přirozeného reálného světa, jmenovitě ty neostré, lze v klasické infinitní matematice modelovat, a to často i dosti věrně?

Je-li však nekonečno použitelné při výkladech neostrých jevů přirozeného reálného světa, pak v neostrosti těchto jevů musí již být přítomné v nějaké své podobě. Kdyby tam nebylo, nemohli bychom ho při těchto výkladech používat, nebo chceme-li, tyto jevy by nebylo možno v klasické infinitní matematice modelovat.

O přítomnosti nekonečna v neostrosti nám leccos naznačí následující vyprávění. V klasické matematice lze užitím neslábnoucí platnosti principu matematické indukce dokázat, že přidáme-li ke konečné množině A jeden další prvek, obdržíme množinu B, kterou nelze vzájemně jednoznačně zobrazit na množinu A.[7] Pro nekonečné množiny toto tvrzení neplatí a Richard Dedekind se dokonce snažil jeho neplatností nekonečné množiny charakterizovat. Neplatnost tohoto tvrzení pro množiny, jejichž prvky lze očíslovat všemi přirozenými čísly, předváděl autor jedné populární knihy na následujícím příběhu.

Představme si hotel o nekonečně mnoha pokojích, které jsou očíslovány všemi přirozenými čísly a všechny jsou obsazené, každý jen jedním hostem. Označme A množinu všech hostů tohoto hotelu. Přesto je možno ubytovat dalšího hosta, který přišel požádat o nocleh, aniž by v některém pokoji byli ubytováni dva hosté. Učiníme to tak, že ho ubytujeme do pokoje číslo 1 a zároveň každého hosta z pokoje číslo n přestěhujeme do pokoje číslo $n + 1$. Je zřejmé, že tímto způsobem množinu B, utvořenou přidáním nového hosta k množině A, vzájemně jednoznačně zobrazíme na množinu A. Představme si ale, že náš hotel má pouze tisíc plně obsazených pokojů. Přesto můžeme postupovat stejně jako prve. Nově příchozího hosta ubytujeme do pokoje číslo 1, hosta z pokoje číslo 1 do pokoje číslo 2, atd. Poněvadž stěhování hostů provádíme postupně, nebude zcela jistě během noci ukončeno (na hosta z pokoje číslo tisíc se vůbec nedostane). Přitom stejně jako prve bude každý host téměř po celý den ubytován. V tomto případě tedy množina o tisíci pokojích má neostře vymezenou část neboli polomnožinu, do níž náležejí ty pokoje, v nichž proběhne stěhování. Tato polomnožina se chová podobně jako klasická Cantorova množina všech přirozených čísel.

[7] To znamená přiřadit každému prvku množiny A právě jeden prvek množiny B tak, aby každý prvek množiny B byl přiřazen právě jednomu prvku množiny A.

Jsme-li tedy důslední, pak nám nezbývá než uznat, že v nějaké podobě se nekonečno ukazuje v neostrosti jevů přirozeného reálného světa. Tedy například na polomnožinových částech velkých – z klasického hlediska konečných – množin, a nikoliv až kdesi za těmito velkými množinami. Této podobě nekonečna budeme říkat **nekonečno přirozené**.

Mohli bychom pochopitelně namítnout, že ve druhém z uvedných příběhů lze, byť jen teoreticky, stěhování hostů zrychlit. V takovém případě bychom ale tomu odpovídajícím způsobem zvětšili počet pokojů v hotelu. Polomnožiny bychom se tedy nezbavili. Můžeme ji pouze vyostřovat.

To je ale téměř stejný případ, jakým bylo ztenčování a narovnávání úsečky nakreslené na papíru. Přitom tak jako tam se při vyostřování čáry na papíru najednou objeví na geometrickém obzoru úsečka, tak se nyní při vyostřování uvedené polomnožiny objeví (rovněž až na geometrickém obzoru) nekonečno ideální.

Nekonečno, o něž nám nyní jde, je tedy vyostřením nekonečna přirozeného,[8] tak jako (ideální) geometrické objekty jsou vyostřením tvarů a velikostí objektů přirozeného reálného světa.

V první polovině devatenáctého století označil Bernard Bolzano nekonečno co do množství za klíč ke studiu všech podob nekonečna. Učinil tak ve svých *Paradoxech nekonečna*, kde následujícími památnými slovy nastínil program množinové matematiky dvacátého století.

> Jde tedy už jen o to, zda budeme schopni určit, co je nekonečno vůbec, a to výkladem toho, co se nazývá nekonečným množstvím. Tak by tomu bylo, kdyby se ukázalo, že přísně vzato neexistuje nic jiného než právě množství, nač lze pojem nekonečna aplikovat, to je, kdyby se ukázalo, že nekonečnost je pouze určitou skladbou množství, neboli že všechno, co prohlašujeme za nekonečné, nazýváme tak jen proto a pokud na něm pozorujeme skladbu, která se dá pojímat jako nekonečné množství.

Bolzano nám tedy radí, abychom u každé podoby klasického nekonečna hledali nějakou klasicky nekonečnou množinu, která tuto jeho podobu vyvolává, nebo abychom alespoň tuto jeho podobu nějakou takovou vhodnou množinou podložili, a teprve jejím prostřednictvím tuto podobu nekonečna uchopili. V klasické matematice dvacátého století se tato Bolzanova rada více než osvědčila, o čemž zajisté není třeba žádného matematika přesvědčovat.

Nám však nyní nejde o různé podoby klasicky vykládaného absolutního nekonečna, ale o různé podoby jevu neostrosti. Přesto shora uvedená Bolzanova slova poskytují oporu i našemu již započatému počínání. Prve jsme se setkali s hlubokým oboustranným poukazem mezi nekonečnem a neostrostí, vyneseným na světlo nekonečnem přirozeným. Ve světle tohoto odhalení nám pak Bolzano vlastně radí, abychom u každé podoby jevu neostrosti hledali nějaké neostře vymezené (to je

[8] Návratem k přirozenému nekonečnu vyzdvihujeme klíčový, leč do nevědomí zasouvaný oboustranný poukaz mezi nekonečnem a neostrostí. Poukaz, jehož přítomnost si možná neuvědomujeme ani tehdy, když slovesný tvar označovaný latinským názvem infinitiv zahrnujeme mezi slovesné tvary označované názvem tvary neurčité.

přirozeně nekonečné) množství, nebo abychom ji alespoň takovým vhodným množstvím podložili, a teprve jeho prostřednictvím tuto podobu uchopili.

Jinými slovy, nejschůdnější cesta k matematizaci přirozeného nekonečna a následně pak k uchopení jevu neostrosti ukazujícího se v přirozeném reálném světě vede přes neostře vymezená množství, i když právě ona budou často až druhotnými, to je do nich vtištěnými nositelkami různých podob těchto jevů.

Bolzanova slova, ať již tak, jak byla Bolzanem míněná, nebo tak, jak jsme je právě tlumočili, svádějí naši pozornost k množstvím jako takovým. Je-li totiž právě množství tím, co umožňuje uchopit různé podoby nekonečna či neostrosti, pak jakási abstraktní kostra těchto podob by měla být přítomna již v podobách samotných množství.

Na rozdíl od klasického výkladu nekonečna, umísťujícího nekonečná množství až za všechna množství vykládaná klasicky jako konečná, ukazují se přirozeně nekonečná množství již při pohledech na množiny, které jsou z klasického hlediska konečné. Přirozeně nekonečné jsou totiž právě neostře vymezené části těchto množin, kterým říkáme polomnožiny.

Některé půvabné polomnožiny byly známy již v antice. Tak například polomnožinou je množství všech přirozených čísel, pro něž platí, že odebereme-li z nějaké dané hromady písku takovýto počet zrníček, stále ještě zbude hromada písku. Zřejmě náleží-li do tohoto množství nějaké číslo, pak tam náleží i číslo o jedničku větší, neboť odebereme-li z hromady jedno zrníčko, zbude opět hromada. Přitom toto množství je částí množiny všech přirozených čísel, která jsou menší než nějaké hodně velké přirozené číslo, pro něž platí, že vytrhneme-li takovýto počet vlasů z hlavy nějakého vlasatce, stále se z něj ještě nestane plešatec.

Autor tohoto pojednání se chtěl vyhnout těmto takříkajíc vykřičeným příkladům, a proto před mnoha lety vymyslel příklad jiný, svým způsobem vhodnější. Od té doby se však i tento příklad stal natolik vykřičeným, že jeho opětné uvedení v této knize je provázeno nemalými autorovými rozpaky.

Jde o následující příklad: Pan Charles Darwin nás poučoval o jisté nepříliš dlouhé posloupnosti tvorů, jejímž prvním členem je opičák Charlie, každý následující člen je synem předcházejícího, a konečně jejím posledním členem je sám pan Charles Darwin. Seskupení všech členů této posloupnosti tvoří množinu. Její částí je třída všech těch členů této posloupnosti, kteří jsou opicemi. Tato část je neprázdná, neboť opičák Charlie je jejím prvkem. Kdyby to byla množina, musela by mít v uvedené posloupnosti poslední prvek. Pan Darwin jím být nemůže, neboť není opicí. Musí to být některý z jeho předků. To by ale byl takový opičák, jehož syn již opičákem není. Je však všeobecně známo, že mláďata opic jsou opět opice.

První dva uvedené příklady polomnožin jsou odedávna známé jako paradox hromady a paradox plešatce. Již z těchto jejich názvů je ovšem patrno, že byly považovány přinejmenším za cosi podivného. Třetí příklad je dodnes často považován za pouhý autorův žert nehodící se do vážných matematických pojednání.

Polomnožiny jsou významnými nositelkami jevu neurčitosti, jmenovitě v těch světech, které vykládáme jako společenství objektů. Především proto, že to nejsou nějaké vzácně se vyskytující jevy, ale naopak se s nimi v takovýchto světech setkáváme na každém kroku. Množství všech zajímavých knih z nějaké obsáhlejší knihovny, množství všech velikánů lidstva, ale také množství všech molekul, které nejsme schopni zrakem odlišit od nějaké dané molekuly, to všechno jsou polomnožiny. Avšak nejenom to. Díky množinám, jejichž částmi jsou, a způsobu, jakým nám jsou dány, jsou polomnožiny přístupné různým přirozeným tříděním, a tím i podrobněji zachytitelné. Následkem toho nám právě polomnožiny umožňují určitěji uchopit mnohé podoby jevu neurčitosti.

Netoliko ke shora uvedeným, ale vůbec ke všem polomnožinám přistupuje novověká evropská věda jako k něčemu nepatřičnému. Předstírá, že polomnožiny nevidí, a není-li zbytí, snaží se od nich odtáhnout za bezpečné meze. Tomu se ovšem není co divit, neboť právě polomnožiny velmi výrazně na jev neurčitosti poukazují.

Nakonec ještě poznamenejme:

Na rozdíl od matematiků pracujících v matematice opřené o Cantorovu teorii množin si schopnosti Boha středověké a barokní rozumářské teologie pochopitelně osvojovat nebudeme.

Naproti tomu schopnosti antických bohů využívat budeme. Činíme tak z týchž důvodů, z jakých si tyto schopnosti osvojili geometři pracující v čisté antické geometrii. Tato geometrie čáry na papíru nezkoumá, i když se jimi často inspiruje. Geometři dobře vědí, které a za jakých okolností mohou své výsledky na toto čáry aplikovat.

Naše „bytí ve světě“ se týká antického geometrického světa. Tím jsme se s Heideggerem rozešli; netvoříme filosofii, ale matematiku.[9]

[9] Výraz: „bytí ve světě“ jako sdružené pojmenování poukazuje na to, že je jím vnímán jednotný fenomen. Tento primární fenomen je třeba vidět jako celek. Jeho neredukovatelnost na součásti, z nichž by jej bylo možno složit, nevylučuje však rozčlenění jeho skladby v několik konstitutivních strukturních momentů, Martin Heidegger (2002), *Bytí a čas*, kap. 2., překl. I. Chvatík. Praha: OIKOYMENH.

1. Základní pojmy

1.1 Třídy, množiny a polomnožiny

V této úvodní kapitole připomeneme každému dobře známé pojmy týkající se tříd, a zopakujeme to, co z nové infinitní matematiky bylo již stručně uvedeno v *Prolegomenech.*[1]

Jestliže z některých dříve již vytvořených objektů některé vydělíme, vznikne **seskupení** těchto vydělených objektů.

Obor není souhrn nějakých již existujících objektů; je to zdroj či jímka, do níž padají vhodné objekty z těch, které se objevují či vznikají.

Každé seskupení nějakých objektů lze vykládat i jako obor, byť již vyčerpaný.

Aktualizací nějakého oboru rozumíme jeho vyčerpání, to je nahrazení tohoto oboru seskupením všech objektů, které do něj padají či mohou padnout.

Třídou rozumíme kterékoliv seskupení nějakých daných objektů (jejích prvků), které vykládáme jako samostaného jedince neboli jako objekt jediný.

Množinou rozumíme takovou třídu, která je ostře vymezená.[2] Navíc (podle rozhodnutí, které jsme učinili) je každá množina z klasického hlediska konečná.

Polomnožinou rozumíme neostře vymezenou třídu, která je **částí** (to je **podtřídou**) nějaké množiny.

Znaky, popřípadě skupiny znaků, sloužící k označování objektů, se nazývají **termy**.

Písmena $A, B, C, \ldots, a, b, c, \ldots$ budeme používat jako zvlášť jednoduché termy, a sice jako blíže neurčené konstanty pro objekty. To znamená, že řekneme-li během nějaké úvahy, že A je objekt, pak až do konce této úvahy označuje A stále týž objekt, lhostejno který. Následkem toho se úvaha prováděná s objektem A týká každého objektu, neboť kterýkoliv objekt mohl být tímto písmenem označen.

Řekneme-li, že A je **konstanta**, pak máme na mysli znak A; řekneme-li, že A je **objekt**, pak máme na mysli objekt, jenž je znakem A označen. Týž objekt může být označen různými termy.

Skutečnost, že nějaké dva termy, například konstanty A, B, označují týž objekt, zapisujeme $A = B$ a čteme „A se rovná B“. I když zápis $A = B$ někdy čteme „objekt A se rovná objektu B“ nebo „objekt A je totožný s objektem B“, vždy

[1] Petr Vopěnka (2014), *Nová infinitní matematika: Prolegomena*. Praha: Karolinum.

[2] Ostrostí rozumíme určitost, jasnost, přesnost, …, krátce onu antickou dokonalost geometrických objektů studovanou v Eukleidových *Základech*.

tím, přísně vzato, rozumíme, že znaky A, B označují týž objekt. Skutečnost, že nějaké dva termy, například konstanty A, B, označují různé objekty, zapisujeme $A \neq B$ a čteme „A je různé od B“ nebo „A se nerovná B“ a podobně.

Zápis $A \in B$ označuje, že objekt B je třída a objekt A **je prvkem** (neboli náleží do) třídy B. Zápis $A \notin B$ označuje, že objekt B je třída a objekt A není prvkem (neboli nenáleží do) třídy B.

Řekneme, že třída A je **podtřídou** (neboli částí) třídy B (označení $A \subseteq B$), jestliže každý prvek třídy A je též prvkem třídy B.

Jsou-li A, B třídy, pro něž současně platí $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$, pak je $A = B$; neboť z daného množství objektů vytváříme toliko jedinou třídu.

Prázdnou třídou rozumíme takovou třídu, která nemá žádné prvky.

Z extensionality tříd plyne, že prázdná třída je toliko jediná. Zřejmě prázdná třída je množina. Znak $\emptyset$ budeme používat jako trvalou konstantu pro prázdnou množinu. To znamená, že v celé této knize (a nejen v ní) označuje $\emptyset$ prázdnou množinu, čímž ovšem není zakázáno označit – bude-li to vhodné – prázdnou množinu i nějakým jiným termem.

Term $\{A\}$ označuje množinu, jejímž jediným prvkem je objekt A. Term $\{\emptyset\}$ tedy označuje množinu, jejímž jediným prvkem je prázdná množina. Protože $\emptyset$ je objekt, je množina $\{\emptyset\}$ neprázdná, neboli $\{\emptyset\} \neq \emptyset$. Podobně $\{\{\emptyset\}\} \neq \emptyset$, atd.

Term $\{A, B\}$ označuje množinu, jejímiž jedinými prvky jsou objekty A, B. Protože svými prvky je třída určena jednoznačně, je $\{A, B\} = \{B, A\}$. Vytváříme-li seznam nějakých věcí, pak tím, že některou věc do něj zapíšeme vícekrát, množství těchto věcí nezvětšíme. Je-li tedy $A = B$, je $\{A, B\}$ jednoprvková množina a $\{A, B\} = \{A\} = \{B\}$.

Term $\{A, B, C\}$ označuje množinu, jejímiž jedinými prvky jsou objekty A, B, C. Podobně $\{A, B, C, D\}$ označuje množinu, jejímiž jedinými prvky jsou objekty A, B, C, D atd.

Průnikem tříd A, B rozumíme třídu, jejímiž prvky jsou právě ty objekty, které náležejí do obou těchto tříd; značíme ji $A \cap B$.

Řekneme, že třídy A, B jsou **disjunktní**, jestliže jejich průnikem je prázdná třída, neboli $A \cap B = \emptyset$.

Sjednocením tříd A, B rozumíme třídu, jejímiž prvky jsou právě ty objekty, které náležejí do třídy A nebo do třídy B; značíme je $A \cup B$.

Rozdílem tříd A, B (v uvedeném pořadí) rozumíme třídu, jejímiž prvky jsou právě ty objekty, které náležejí do třídy A a nenáležejí do třídy B; značíme ji $A \setminus B$.