NOVÁ INFINITNÍ MATEMATIKA

KAROLINUM

III. Reálná čísla a jejich diskretizace

PETR VOPĚNKA

Nová infinitní matematika
III. Reálná čísla a jejich diskretizace

Petr Vopěnka

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum
www.cupress.cuni.cz
Redakce Lenka Ščerbaničová
Obálka Jan Šerých
Sazba Šárka Voráčová
Vydání první

ISBN 978-80-246-2985-8
ISBN 978-80-246-3219-3 (online : pdf)

Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum 2016

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Předmluva

Páteří, byť často skrytou, veškeré matematiky od jejích počátků až do dnešní doby jsou reálná čísla.

Dnes každému dobře známá kanonická korespondence mezi reálnými čísly a body na přímce, k jejímuž dotvoření došlo až v první polovině devatenáctého století, vnesla do oboru reálných čísel kontinuum. I na reálná čísla se tak začala vztahovat následující slova Aristotelova, uvedená v šesté knize jeho Fyziky.

> … je nemožné, aby se něco spojitého skládalo z nedělitelného, jako například čára z bodů, je-li čára něčím spojitým a bod nedělitelným.

Snahy o porušování kontinuity reálných čísel byly považovány přinejmenším za nevhodné. Pokud nebylo zbytí, jako například v případě Archimedově nebo zakladatelů infinitezimálního počtu, byly usilovně hledány často krkolomné cesty, po nichž by bylo možno zakázané postupy obcházet.

Také v nové infinitní matematice hrají tato čísla (spolu s konečnými přirozenými čísly) klíčovou roli. Třída FN konečných přirozených čísel zachycuje délku cesty na geometrický obzor, třída Real reálných čísel soudržnost a kontinuitu tohoto obzoru.

Protože na rozdíl od klasické infinitní matematiky neklademe tento obzor až do nějakého strnulého jednoduše vykládaného absolutního nekonečna, obestřeli jsme na něm ležící reálná čísla širokou a hlubokou prázdnotou vyzývající k účelnému zaplňování. Toho pak v tomto pojednání o reálných číslech budeme využívat.

1. Hledání reálných čísel

První kapitola třetí knihy o nové infinitní matematice je věnována usilovnému hledání reálných čísel během historického vývoje matematiky.

První oddíl této kapitoly se odehrává v antické geometrii, druhý v matematice druhé poloviny devatenáctého století a třetí v nové teorii množin a polomnožin. Ve zbývajících oddílech budou reálná čísla jako taková nalezena.

1.1 Eudoxovo rozvinutí výkladu antického geometrického světa

V pojednání *Peri tón méchanikón theorématón* (Metoda)[1] **Archimedes** (287–212) napsal:

> Proto i nemalou část těchto pouček o kuželu a jehlanu, jejichž důkaz nalezl první Eudoxos (že je totiž kužel třetina válce a jehlan třetina trojbokého hranolu, majících touž základnu a stejnou výšku), sluší se přiřknout Demokritovi, jenž se první vyslovil o uvedeném tvaru bez přesného důkazu.

Při řešení uvedených problémů pronikl **Eudoxos z Knidu** (408–355) do nesrovnatelně větších hlubin antického geometrického světa, než jsou ty, v nichž se odehrává prvních šest knih Eukleidových *Základů*. Odtud pak vytáhl princip umožňující při různých příležitostech do těchto hlubin vstupovat. Tomuto principu, především pak jeho objevu, je věnován tento oddíl.

Úloha nalézt k danému geometrickému tělesu kvádr, který má stejně velký objem, patří mezi nejdůležitější stereometrické úlohy, o jejichž řešení se pokoušeli antičtí geometři. Eukleides jí věnoval jedenáctou a dvanáctou knihu *Základů*. K úplnému zvládnutí této úlohy pro případ všech tak říkajíc „hranatých“ těles zbývalo již jen dokázat následující tvrzení:[2]

> Dva čtyřstěny, které mají stejnou výšku a jejichž podstavami jsou shodné trojúhelníky, mají stejně velký objem.

Užitím tohoto tvrzení lze pak již snadno dokázat, že objem jehlanu je roven jedné třetině z objemu hranolu o stejné základně a stejné výšce.

---

[1] Cit. podle Johan Ludvig Heiberg (1907), “Eine neue Archimedeshandschrift”. In: *Hermes*, Volume 42, Berlin, s. 245.

[2] Srov. *Základy XI*, tvrzení IV. Viz též Eukleides (2011), *Základy. Knihy XI–XII*, s. 118–119 a komentář na s. 48.

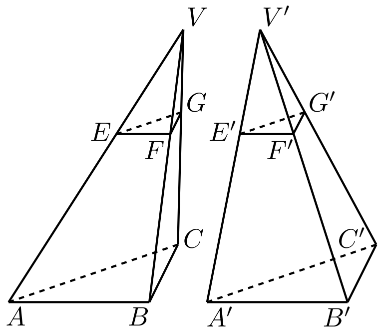
Demokritovo řešení problému objemu čtyřstěnu

Pro naše účely nyní postačí pouze připomenout, že podle učení **Demokrita z Abdér** (460–370) se vše, co se nachází v reálném světě, skládá z malých, lidským okem neviditelných a pro svou absolutní tvrdost dále již nedělitelných atomů. Tyto atomy mají tvary geometrických těles, přičemž vlastnosti věcí viditelných jsou vyvolány rozložením a tvary atomů v nich přítomných. Jmenovitě stejnorodost nějaké věci, například kusu ryzího zlata, je vyvolána rovnoměrným rozložením atomů stejné velikosti a stejného, pro zlato příznačného, tvaru, z nichž je tento kus zlata složen.

Je vysoce pravděpodobné, že Demokritos dokazoval tvrzení o rovnosti objemů čtyřstěnů následujícím způsobem.

Nechť $VABC$, $V'A'B'C'$ jsou dva čtyřstěny takové, že jejich podstavné trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou shodné a výšky nad těmito podstavnými trojúhelníky jsou stejně veliké. Dejme tomu, že oba tyto čtyřstěny jsou vytesány z mramoru. Potom atomy, z nichž jsou složeny, mají stejný tvar a velikost a jsou v těchto čtyřstěnech stejně hustě rozloženy.

Postavme tyto čtyřstěny na podstavnou rovinu tak, aby v ní ležely trojúhelníky ABC, $A'B'C'$. Protneme-li tyto čtyřstěny rovinou rovnoběžnou s podstavnou rovinou, pak trojúhelníky EFG, $E'F'G'$, v nichž tato rovina čtyřstěny protíná, jsou shodné, což není obtížné dokázat. To ale znamená, že i vrstvy atomů příslušející těmto řezům mají stejný počet atomů, a poněvadž tyto čtyřstěny mají stejnou výšku, mají i stejný počet těchto vrstev. V důsledku toho se oba tyto čtyřstěny skládají ze stejného počtu stejných atomů, a poněvadž v obou čtyřstěnech jsou atomy stejně hustě rozloženy, mají oba tyto čtyřstěny stejný objem.

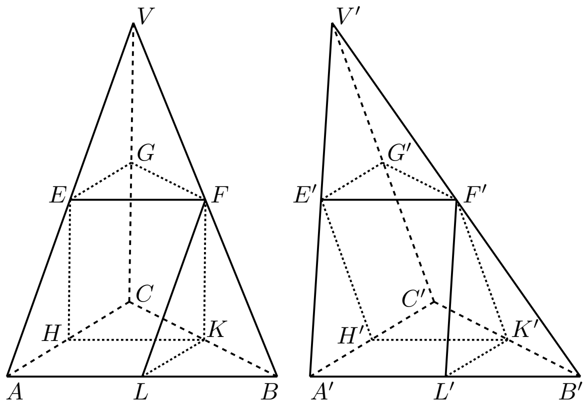


O Eudoxovi je známo, že se během pobytu v Aténách seznámil s Platonem a stal se členem jeho Akademie. **Platon** (427–347) byl nesmiřitelným odpůrcem Demokritovým. Demokritovo řešení problému objemu čtyřstěnu muselo u Platona vyvolat velké rozhořčení. Proto asi právě od Platona vzešel podnět vyloučit z důkazu tvrzení o objemu čtyřstěnu (a také kužele) všechny úvahy o atomech.

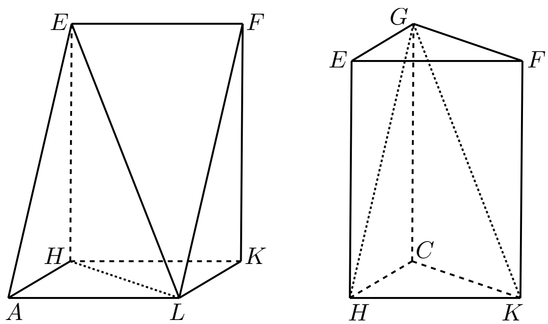
Eudoxovo řešení problému objemu čtyřstěnu

Nechť $VABC$, $V'A'B'C'$ jsou čtyřstěny, které mají shodné podstavy ABC, $A'B'C'$ a stejnou výšku.

Rozklad čtyřstěnu $VABC$ na dva navzájem shodné čtyřstěny $VEFG$, $FLBK$ a na dva trojboké hranoly $ALKHEF$, $HKCEFG$, jak je to nakresleno na obrázku, kde body E, F, G, H, K, L jsou středy příslušných hran, se nazývá Eudoxův rozklad čtyřstěnu $VABC$.



Užitím dalších dvou obrázků snadno nahlédneme, že čtyřstěn $VEFG$ (a tedy i $FLBK$) má menší objem než každý z uvedených trojbokých hranolů. Následkem toho oba tyto hranoly mají dohromady větší objem, než je polovina objemu čtyřstěnu $VABC$.



Proveďme nyní stejným způsobem Eudoxův rozklad i čtyřstěnu $V'A'B'C'$. Užitím prvních dvou obrázků snadno nahlédneme, že trojboké hranoly $HKCEFG$, $H'K'C'E'F'G'$ mají shodné podstavy a stejnou výšku; následkem toho mají i stejný objem. Podobně je tomu i s hranoly $ALKHEF$, $A'L'K'H'E'F'$. Rovněž snadno nahlédneme, že podstava čtyřstěnu $VEFG$ (a tedy i $FLBK$) je shodná s podstavou čtyřstěnu $V'E'F'G'$ (a tedy i $F'L'B'K'$), přičemž všechny tyto čtyři čtyřstěny mají stejnou výšku (poloviční, než je výška čtyřstěnu $VABC$).

Eudoxův důkaz rovnosti objemů čtyřstěnů VABC a V′A′B′C′

Nechť například čtyřstěn $VABC$ má větší objem než čtyřstěn $V'A'B'C'$. Nechť Q je (maličký) kvádr, jehož objem spolu s objemem čtyřstěnu $V'A'B'C'$ je menší než objem čtyřstěnu $VABC$. Odeberme ze čtyřstěnu $VABC$ oba trojboké hranoly vytvořené jeho Eudoxovým rozkladem. Objem zbývajících čtyřstěnů je dohromady menší než polovina objemu čtyřstěnu $VABC$, neboť více než polovinu jeho objemu jsme z něj odebrali. Z každého z těchto zbývajících čtyřstěnů odebereme opět obdobné hranoly a podržíme zbytek, to je čtyři malé čtyřstěny podobné původnímu, a z každého odebereme opět obdobné hranoly a podržíme zbytek, a to čiňme tak dlouho, dokud nebudeme držet čtyřstěny, jejichž objem je dohromady menší než objem kvádru Q. V tomto okamžiku jsme ze čtyřstěnu $VABC$ odebrali hranoly, jejichž objem je dohromady větší než objem čtyřstěnu $V'A'B'C'$. Kolikrát jsme odebírali hranoly ze čtyřstěnu $VABC$, tolikrát je nyní odebírejme i ze čtyřstěnu $V'A'B'C'$, rozumí se na každém kroku vždy obdobné hranoly. To ale znamená, že na každém kroku odebíráme ze čtyřstěnu $V'A'B'C'$ stejný objem, jaký jsme odebírali ze čtyřstěnu $VABC$. Nakonec tedy odebereme ze čtyřstěnu $V'A'B'C'$ hranoly, jejichž objem je dohromady stejný jako objem všech hranolů odebraných ze čtyřstěnu $VABC$, tedy větší než objem čtyřstěnu $V'A'B'C'$. To však je spor, neboť ze čtyřstěnu $V'A'B'C'$ nemůžeme odebrat větší objem, než je objem tohoto čtyřstěnu.

Ideu obsaženou v Eudoxově důkazu klíčového tvrzení, o niž nám nyní jde, vytáhl z tohoto důkazu **Eukleides** (325–260), osamostatnil ji a založil na ní desátou knihu *Základů* věnovanou nesouměřitelnosti délek některých úseček. Samostatně ji vyslovil hned jako první tvrzení této knihy, a to následujícím způsobem.[3]

Tvrzení 1.1 (o neustálém půlení)**.** Jsou-li dány dvě veličiny nestejné, když od větší odečteme část větší než polovina a od zbytku opět část větší než polovina a tak stále budeme činiti, zbude nějaká veličina, jež bude menší než daná veličina menší.

Pro zajímavost ještě poznamenejme, že Eukleides se v této formulaci uvedeného prvního tvrzení desáté knihy *Základů* věrně drží Eudoxova důkazu. Teprve dodatečně si uvědomil (spíše však si to uvědomil některý z pozdějších opisovačů *Základů*), že slova „větší než polovina“ lze nahradit slovy „větší nebo rovna polovině“.

Archimedes považoval Eudoxův důkaz klíčového tvrzení za naprosto dokonalý, což plyne z jeho prve uvedených slov. Stejný názor zastávala od antiky až do dvacátého století táhnoucí se řada matematiků. Ani my proti němu nedovedeme vznést žádné námitky.

Antičtí geometři by ale za naprosto nejčistší prokázání pravdivosti obou uvedených tvrzení o objemech čtyřstěnů právem považovali nalezení návodu na proměnu jednoho z těles v nich vystupujících na těleso druhé.[4] Proto právě o nalezení ta-

[3] Viz Eukleides (2012), *Základy. Kniha X.*, tvrzení I, s. 64.

[4] To volně řečeno znamená rozložit jedno z těchto těles na konečně mnoho částí a z nich pak složit těleso druhé.

kového návodu se tito geometři pokoušeli, leč jejich snaha se nesetkala se zdarem. Neúspěšně se o to později pokoušeli i geometři středověcí, renesanční, novověcí, dokonce i geometři devatenáctého století.

Ze zprvu nevinně vyhlížející úlohy se tak stal problém. Došlo to tak daleko, že na *Druhém mezinárodním matematickém kongresu* (Paříž 1900) zařadil **David Hilbert** (1862–1943) tento problém mezi jím vybraných dvacet tři do té doby neřešených problémů. Téměř vzápětí po uveřejnění Hilbertovy přednášky[5] dokázal Hilbertův student, švýcarský matematik **Max Dehn** (1878–1952), že tento problém není řešitelný. Vytvořil totiž takové dva čtyřstěny o shodné podstavě a stejné výšce, z nichž žádný není proměnitelný na druhý.[6]

1.2 Osamostatnění oboru reálných čísel

Jak je všeobecně známo, **celými čísly** rozumíme čísla

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Racionálními čísly rozumíme ta čísla, která lze vyjádřit ve tvaru zlomku

$$\frac{p}{q}, \quad \text{kde} \quad p, q \quad \text{jsou celá čísla,} \quad q \neq 0.$$

Číselnou osou rozumíme přímku, na níž jsou vyznačeny dva různé body $B(0)$, $B(1)$. Tu její polopřímku, která je určena bodem $B(0)$ a na níž leží (popř. neleží) bod $B(1)$, nazýváme **kladnou** (popř. **zápornou**) polopřímkou číselné osy.

Racionální čísla znázorňujeme na číselné ose tak, že číslu 0 přiřadíme bod $B(0)$, kladnému (popřípadě zápornému) racionálnímu číslu x pak přiřadíme ten bod $B(x)$, který leží na kladné (popřípadě záporné) polopřímce číselné osy, pro nějž poměr délky úsečky $B(x)B(0)$ ku délce úsečky $B(1)B(0)$ je roven číslu x (popřípadě $-x$).

Tímto způsobem jsme zavedli korespondenci mezi oborem čísel racionálních a jistým podoborem všech bodů ležících na číselné ose, nikoli však s celým tímto oborem. Na kladné polopřímce číselné osy totiž leží například bod $B(\sqrt{2})$ takový, že poměr délky úsečky $B(\sqrt{2})B(0)$ ku délce úsečky $B(1)B(0)$ je $\sqrt{2}$.

Tato úvaha (a nejen ona) zavdala příčinu k rozšíření oboru racionálních čísel do oboru tzv. **čísel reálných**, jež by zajistilo úplnou korespondenci mezi ním a oborem všech bodů na číselné ose, která by byla rozšířením korespondence výchozí (to je té, v níž vystupovala pouze čísla racionální). V souladu s tím pak reálné číslo odpovídající bodu X ležícímu na kladné polopřímce číselné osy bylo vykládáno jako poměr délky úsečky $B(0)X$ ku délce úsečky $B(0)B(1)$.

---

[5] David Hilbert (1900), Mathematische Probleme – Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900, *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse.* Heft 3, s. 253–297.

[6] Max Dehn se tímto problémem zabýval ve své habilitační práci a také v článku *Über den Rauminhalt*, viz Dehn, M. (1901). Über den Rauminhalt. In: *Mathematische Annalen* 55(3)(1901), s. 465–478.

Jinými slovy: kladná reálná čísla byla zavedena tak, aby mohla být vykládána jako poměry délek úseček. Ta reálná čísla, která nejsou racionální (to je ta, která z důvodu zúplnění korespondence byla k racionálním přidána), obdržela název čísla **iracionální**.

Pokud obor reálných čísel byl vymezen pouze jako obor adresátů v této tzv. kanonické korespondenci s oborem bodů ležících na číselné ose, bylo zacházení s reálnými čísly více či méně skrytě odvozováno a ospravedlňováno geometrickým názorem.

Takovým nápadným příkladem podřízenosti reálných čísel geometrickému názoru bylo tvrzení, podle něhož

> každá spojitá funkce f na uzavřeném intervalu $[a, b]$ reálných čísel, pro niž je $f(b) < 0 < f(a)$, nabývá v některém bodě tohoto intervalu za svou hodnotu číslo 0.

Na toto geometrické tvrzení se odvolal i **Carl Friedrich Gauss** (1777–1855), když v roce 1799 podal první důkaz tzv. základní věty algebry, podle níž

> každý mnohočlen $ax^n + \cdots + a_0$ s reálnými koeficienty lze rozložit na součin lineárních a kvadratických mnohočlenů (rovněž s reálnými koeficienty).

Byl si přitom vědom, že toto „ryze analytické řešení“ dokázal užitím geometrického názoru. Aby důkaz základní věty algebry očistil od geometricky odůvodněného tvrzení, podal Gauss v roce 1816 další dva důkazy této algebraické věty, v nichž toto geometrické tvrzení již nepoužil a v nichž přítomnost geometrického názoru byla téměř nepozorovatelná.

Gaussova snaha vyloučit geometrický názor z důkazu základní věty algebry podnítila **Bernarda Bolzana** (1781–1848) k vypracování „ryze analytického“ důkazu pro výše zmíněné tvrzení o spojité funkci. Učinil tak v práci uveřejněné už v roce 1817.[7] Když si koncem devatenáctého století matematici tuto práci přečetli, začalo být zmiňované tvrzení o spojité funkci nazýváno Bolzanovou větou.

Aby mohl učinit to, co si předsevzal, musel ovšem Bolzano nejprve obor reálných čísel osamostatnit; odloučit ho od číselné osy. Přesněji řečeno nalézt nebo alespoň naznačit takové vymezení tohoto oboru, které by bylo založeno jen na zacházení s čísly, neopíralo se o geometrický názor a pochopitelně aby kanonická korespondence mezi takto osamoceným oborem reálných čísel a oborem bodů na číselné ose byla zachována, nyní však už jen jako korespondence mezi dvěma rovnocennými obory. To, jak se Bolzano tohoto úkolu zhostil, bylo činem mnohem dalekosáhlejším než pouhý „ryzí analytický“ důkaz věty, která obdržela jeho jméno.

K předvedení Bolzanova vkladu do výkladu reálných čísel použijeme posloupnosti, jak je to ostatně dnes obvyklé. Bolzano ovšem používal částečné součty nekonečných řad, neboť řadám byla v jeho době dávána přednost.

---

[7] Viz Bernard Bolzano (1817), „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege“. In: *Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften.*

Posloupností reálných čísel $a_1, a_2, \ldots$ budeme nazývat takovou podtřídu reálných čísel, na kterou lze zobrazit všechna přirozená čísla FN. Tedy existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi FN a $\{a_n\}$. Neboli $\{a_n\}$ je lineárně uspořádaná vzhledem k FN.

Řekneme, že reálné číslo a (popřípadě bod A ležící na číselné ose) je **limitou** posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ reálných čísel (popřípadě posloupnosti $A_1, A_2, \ldots$ bodů ležících na číselné ose), jestliže platí:

> ať zvolíme jakkoli malé kladné číslo ε, lze vždy v této posloupnosti dospět k takovému jejímu členu a_m (popřípadě A_m), že pro každé $n \geq m$ je
>
> $$|a - a_m| < \varepsilon \quad (\text{popřípadě } |A - A_n| < \varepsilon).$$

Připomeňme, že je-li x reálné číslo, pak $|x|$ označuje jeho **absolutní hodnotu**. To znamená, že

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0, \\ -x & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Podobně jsou-li X, Y body ležící na číselné ose, pak $|X - Y|$ označuje to reálné číslo, které udává poměr délky úsečky XY ku délce úsečky $B(0)B(1)$.

Zřejmě má-li posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, \ldots$ limitu, pak pouze jednu.

Řekneme, že posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, \ldots$ (popřípadě posloupnost bodů $A_1, A_2, \ldots$ ležících na číselné ose) je **bolzanovská**, jestliže platí:

> ať zvolíme jakkoli malé kladné racionální číslo ε, lze vždy v této posloupnosti dospět k takovému jejímu členu a_n (popřípadě A_n), že pro každé $m \geq n$ je
>
> $$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad (\text{popřípadě } |A_m - A_n| < \varepsilon).$$

Zřejmě je-li a limitou posloupnosti reálných čísel $a_1, a_2, \ldots$, pak tato posloupnost je bolzanovská. Zvolíme-li totiž racionální číslo $\varepsilon > 0$ a k němu n takové, že pro každé $m \geq n$ je $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, pak pro každé $m \geq n$ je

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Případ posloupnosti bodů ležících na číselné ose je obdobný.

Naskýtá se otázka, zda také naopak každá bolzanovská posloupnost reálných čísel má limitu. V předmnožinové matematice tím bylo míněno, zda platí: je-li dána nějaká bolzanovská posloupnost reálných čísel, pak je uskutečnitelná i její limita.

Vzhledem k prvotnímu vymezení oboru reálných čísel musíme odpověď na tuto otázku hledat v geometrii. Tážeme se tedy, zda vždy, když je dána nějaká bolzanovská posloupnost bodů ležících na číselné ose, je uskutečnitelný takový bod, který je její limitou.

Uspokojivou odpověď na takto položenou otázku nám ovšem nedá ani Zeus. Jeho odpověď by totiž byla záporná, neboť ve většině případů by takový bod nedovedl uskutečnit. Zeus sice může sledovat, jak se body dané bolzanovské posloupnosti na číselné ose usazují vždy od jistého počínaje na stále kratších úsečkách (jejichž délky ubíhají k nule), avšak uchopení bodu, do něhož se tyto úsečky nakonec scvrknou, se vymyká jeho schopnostem; pokud ovšem z nějakého jiného důvodu tento bod již neznal předtím. Musel by totiž projít celou posloupnost těchto zmenšujících se úseček, aby k němu dospěl. To ale neumí; pouze v této posloupnosti umí dojít tak daleko, jak si zamane. Ať však v ní dojde jakkoli daleko, až na konec nedosáhne.

Do hry však vstupuje mocnější uskutečňovatel než Zeus. Takový, který ani nemusí projít uvedenou posloupností krok za krokem; umí ji však přehlédnout jediným pohledem až na obzor ležící v nekonečnu, kde jeho zrak spočine na bodě, k němuž se daná bolzanovská posloupnost přimkla. Křesťanská Evropa takového mocného uskutečňovatele zná. Právě Jeho, byť v tomto případě skytého v nevědomí, si musel Bolzano vzít na pomoc, když se odvážil vyslovit následující postulát.

Bolzanův postulát. Každá bolzanovská posloupnost reálných čísel má limitu.[8]

Toliko On totiž ručí za uskutečnitelnost limity bolzanovské posloupnosti $B(a_1)$, $B(a_2)$, $\ldots$ bodů ležících na číselné ose. Této limitě, kterou označíme B, odpovídá v kanonické korespondenci reálné číslo a neboli $B = B(a)$. Kanonická korespondence nám pak nejen umožňuje, ale přímo vnucuje výklad čísla a jakožto limity posloupnosti reálných čísel a_1, a_2, $\ldots$

Poznamenejme, že ve výše uvedené práci Bolzano užitím tohoto postulátu dokázal též větu o supremu a umožnil tak prokázat „ryze analytické“ důkazy těch tvrzení, která se opírala o geometrickou poučku, podle níž k rozlomení úsečky na dvě části dojde vždy v nějakém jejím bodě. Při této příležitosti též upozornil na časté chyby, jichž se matematici při používání této poučky dopouštěli.

Důsledné a úplné osamostatnění oboru reálných čísel přišlo na pořad dne až v sedmdesátých letech devatenáctého století. K dosažení tohoto cíle byly zvoleny dva různé postupy. Přitom podstatné ideje obou byly obsaženy v tehdy již více než padesát let staré výše zmiňované Bolzanově práci, kterou však (ač byla napsána německy) se nikdo v Německu, natož ve Francii, neobtěžoval přečíst; byla totiž vydána v Praze.

První samostatné, to je od geometrie odloučené vybudování reálných čísel navrhl již v roce 1872 **Georg Cantor** (1845–1916).[9] Cantorův postup rozšiřování oboru racionálních čísel do oboru čísel reálných je následující:

Každé bolzanovské posloupnosti racionálních čísel přiřadíme jako její limitu abstraktní objekt, který nazveme **reálným číslem**. Pokud ale tato posloupnost má za limitu číslo racionální, pak tímto objektem je to **racionální číslo**, které je její limitou. Jinými slovy v takovém případě jí již žádnou jinou limitu nepřiřazujeme. Pokud žádné racionální číslo není limitou této posloupnosti, pak reálné číslo, které jí bylo přiřazeno jakožto její limita, nazýváme **číslem iracionálním**.

Cantor pochopitelně název bolzanovská posloupnost nepoužíval. Později když se ke své teorii reálných čísel vracel, ji nazýval posloupnost fundamentální.

[8] To znamená, že limita bolzanovské posloupnosti je uskutečnitelná.

[9] Georg Cantor (1872), „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“. In: *Mathematische Annalen* 5, s. 123–132.