NOVÁ INFINITNÍ MATEMATIKA

KAROLINUM

IV. Staronový diferenciální počet

PETR VOPĚNKA

Nová infinitní matematika
IV. Staronový diferenciální počet

Petr Vopěnka

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum
www.cupress.cuni.cz
Redakce Lenka Ščerbaničová
Obálka Jan Šerých
Sazba Šárka Voráčová
Vydání první

ISBN 978-80-246-2984-1
ISBN 978-80-246-3220-9 (online : pdf)

Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum 2016

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Předmluva

Newtonův a Leibnizův objev infinitezimálního kalkulu je dodnes považován za jeden z největších výdobytků lidského ducha. Je tomu tak právem, neboť matematika jím obdržela metodu nevídané účinnosti, která jí umožnila získávat poznatky výrazně překračující obzor do té doby obvyklého geometrického názoru a novověká evropská přírodověda nepostradatelný nástroj, jemuž vděčí za nejeden ze svých triumfálních úspěchů.

Takzvaná vyšší matematika – jak byla nazývána ta část matematiky, která se opírala o infinitezimální kalkul – byla založena na kalkulacích s nekonečně malými veličinami. Přitom nejprve především prostřednictvím podílu dvou a součtu nekonečně mnoha těchto veličin bylo možno získávat veličiny již přístupné dosavadnímu geometrickému názoru. Podle toho je infinitezimální kalkul tradičně rozdělován na kalkul diferenciální a kalkul integrální.

Tajemná povaha nekonečně malých veličin však infinitezimálnímu kalkulu dodávala mystický nádech, čímž samotný jeho objev nabýval v očích mnoha lidí rozměrů až nezasloužených; zároveň ale u nejednoho stroze racionálně uvažujícího matematika vzbuzovala pocit nejistoty. Podezření, že matematika pracuje s pojmy přinejmenším nejasnými, bylo zesilováno nepříjemnými chybami, jichž se mohl dopustit každý, kdo si při kalkulacích s nekonečně malými veličinami počínal nepozorně. Avšak na druhé straně kalkulace opírající se o jakýsi nevědomý nový geometrický názor, týkající se právě nekonečně malých veličin, vedly neomylně k udivujícím a nezpochybnitelným výsledkům.

Matematici, jejichž věda byla považována ze všech věd za nejjistější, se ovšem nemohli smířit s tím, že nejplodnější součást matematiky byla založena na mlhavých pojmech. Po několika marných pokusech vynést onen tajemný názor, týkající se nekonečně malých veličin, z nevědomí do vědomí, a tím vyjasnit a vyostřit předmět jeho působnosti tak, jak to přísnost matematiky vyžadovala, nakonec na pojem nekonečně malé veličiny rezignovali. Příležitost jim k tomu poskytl d'Alembert, jenž veden snahou vyloučit aktuální nekonečno z matematiky zavedl pojem limity v jeho nejrůznějších obměnách. O tento pojem se pak matematická analýza mohla opřít a nahrazovat jím v různých úvahách nekonečně malé veličiny, a to i později v době, kdy aktuální nekonečno již v matematice zdomácnělo.

Toto přetváření infinitezimálního kalkulu do $\varepsilon\delta$-analýzy (nazývané tak dnes poněkud posměšně podle vžitých technik příznačných pro zacházení s limitami) netoliko uspokojovalo nároky matematiků na přesnost a jasnost, ale otevřelo jim nová široká pole působnosti. Nahrazování úvah o nekonečně malých veličinách úvahami o limitách nebylo totiž záležitostí zcela mechanickou, ale nezřídka vyžadovalo přístupy tvůrčí. Kromě toho postupy a metody vypracované při této činnosti bylo možno zobecňovat a užít při zkoumání mnohem obsáhlejších předmětů studia, než je obor reálných čísel a funkcí. To spolu se vstupem teorie množin do matematiky dalo vznik takovým oborům, jako je topologie či funkcionální analýza.

Úspěšným zvládnutím všeho, čeho do poloviny devatenáctého století dosáhl infinitezimální kalkul, odstraněním různých chyb a omylů, k nimž při zacházení s nekonečně malými veličinami došlo, vyjasněním některých nedorozumění a v neposlední řadě nesmírnou plodností toho směru, jímž se matematikové vydali při odstraňování nekonečně malých veličin, tím vším bylo vyvoláno všeobecné přesvědčení, že právě $\varepsilon\delta$-analýza je onou hledanou správnou odpovědí na otázky týkající se základů infinitezimálního kalkulu. I když z dějin matematiky nebylo možno původní pojetí infinitezimálního kalkulu vymazat, nehledě na to, že například fyzikové se diktátu $\varepsilon\delta$-analýzy zcela nepodrobili, matematici považovali původní infinitezimální kalkul nekonečně malých veličin v lepším případě za jakési historické nedopatření, v horším pak za naprostý nesmysl.

Fyzikové se ovšem původního pojetí infinitezimálního kalkulu nedrželi z nějakého marnivého vzdoru vůči matematikům, ale proto, že $\varepsilon\delta$-analýza potlačila to, na čem především byla založena síla infinitezimálního kalkulu. Totiž jednak intuici opírající se o onen podivný, leč nadmíru užitečný názor týkající se nekonečně malých veličin, jednak o ni opřenou průhlednost kalkulací s těmito veličinami. K zachycení názorných pojmů infinitezimálního kalkulu bylo v $\varepsilon\delta$-analýze potřeba mnohem více kvantifikátorů a jednoduché kalkulace byly nahrazeny tvrzeními často s málo průhlednými důkazy. Ostatně nejeden matematik tajně s nekonečně malými veličinami pracoval a výsledky takto získané klopotně překládal do $\varepsilon\delta$-analýzy. Tato neupřímnost matematiků se projevila například i v tom, že v univerzitních kurzech matematické analýzy se sice přednášelo řešení diferenciálních rovnic, mlčky se však předpokládalo, že sestavování či odvozování těchto rovnic se studenti naučí v kurzech fyziky. Ve dvacátém století pak některé důležité a názorné pojmy, které vypracovali fyzikové užitím nekonečně malých veličin, mohly být těchto veličin zbaveny jen tak, že byly složitě modelovány prostředky funkcionální analýzy. Výmluvným příkladem toho je známá Diracova funkce.

Obrat nastal až v polovině dvacátého století, a sice v souvislosti s objevem nestandardních modelů teorie množin. Tyto modely se vyznačují tím, že původní – to je standardní – přirozená čísla jsou v nich prodloužena o takzvaná čísla nestandardní, leč od standardních vnitřními prostředky příslušného modelu neodlišitelná. O tom, že obrácené hodnoty těchto nestandardních přirozených čísel modelují nekonečně malá čísla, jistě není třeba nikoho přesvědčovat. Této příležitosti se chopil Abraham Robinson, který vybudoval základy takzvané nestandardní analýzy. Jemu a jeho následovníkům se tak podařilo rehabilitovat oprávněnost veškerých technik používaných při kalkulacích s nekonečně malými veličinami, a navíc ospravedlnit i některé další užitečné principy jich se týkající; dokonce i takové, které by objevitelé infinitezimálního kalkulu přijali s rozpaky.

Tato rehabilitace nekonečně malých veličin a kalkulací s nimi byla sice matematiky zabývajícími se $\varepsilon\delta$-analýzou uznána – ostatně neuznat ji nebylo možné –, nicméně proti nestandardní analýze byly vznášeny různé námitky, z nichž následující dvě jsou závažné.

Za prvé: rehabilitace technik používaných při kalkulacích s nekonečně malými veličinami ještě neznamená rehabilitaci původní intuice potřebné k zacházení s těmito veličinami. Nestandardní analýza totiž nepostihla nekonečně malé veličiny v jejich původní podobě, ale pouze je modelovala. Následkem toho původní intuici nahradila intuicí jinou, sice příbuznou, kterou si však může osvojit je ten, kdo zná nestandardní modely teorie množin. K tomu je ale nezbytné mít mnoho znalostí z moderní teorie množin a matematické logiky. Z toho důvodu nelze ani nestandardní analýzu přednášet v běžných univerzitních kurzech. Pro fyziky – a vůbec pro ty, kdož dosud používají původní infinitezimální kalkul – je objev nestandardní analýzy sice velkým zadostiučiněním, méně však již účinnou pomocí, neboť jde o zadostiučinění formální.

Za druhé: nestandardní analýza vlastně jenom překládá výsledky získané $\varepsilon\delta$-analýzou do jazyka nekonečně malých veličin. Žádné nové výsledky však nepřináší. Dokud nepředvede něco, co $\varepsilon\delta$-analýza nedovede, jde vlastně jen o zajímavou hříčku.

Tato druhá námitka je především licoměrná. Vždyť $\varepsilon\delta$-analýza (alespoň v počátečním období) nedělala nic jiného, než že překládala pojmy a poznatky infinitezimálního kalkulu do jazyka limit. Správně by tedy ona měla předvést něco, co nestandardní analýza nedovede. Nic takového však $\varepsilon\delta$-analýza předvést nemůže, neboť jazyk nestandardní analýzy je (konzervativním) rozšířením jazyka $\varepsilon\delta$-analýzy a vše, co je vyjádřeno a dokázáno v $\varepsilon\delta$-analýze, je automaticky vyjádřeno a dokázáno v nestandardní analýze.

Avšak i kdyby nestandardní analýza nepřinesla žádný poznatek, který $\varepsilon\delta$-analýza nedovede získat, nebyl by to ještě dostatečný důvod pro její odmítnutí. Ostatně například komplexní čísla jsou konzervativním rozšířením čísel reálných (to znamená, že o reálných číslech nelze jejich prostřednictvím dokázat nic, co by nebylo možno dokázat již jen užitím samotných reálných čísel), kdo se však pokouší dokázat například tvrzení o rozkladu polynomu s reálnými koeficienty na kvadratické a lineární polynomy rovněž s reálnými koeficienty (tedy tvrzení týkající se výhradně reálných čísel), ten teprve užitečnost komplexních čísel náležitě ocení.

Kromě toho zastánci $\varepsilon\delta$-analýzy mlčky od nestandardní analýzy vyžadují, aby poznatek, který $\varepsilon\delta$-analýza získat nedovede, byl formulován v jazyce $\varepsilon\delta$-analýzy. Tím je ovšem nestandardní analýza předem degradována na pouhý nástroj k získávání poznatků $\varepsilon\delta$-analýzy. To je ale podobné tomu, jako bychom v teorii komplexních čísel uznávali jen ty pojmy a poznatky, které se týkají jen čísel reálných, a tedy takovým pojmům, jako jsou například čísla komplexně sdružená, goniometrické vyjádření komplexního čísla a podobně, přiznávali jen služebnou povahu a poznatku $e^{2\pi \mathrm{i}} = 1$ nepřiznali žádnou mimořádnou hodnotu.

Naopak $\varepsilon\delta$-analýza by si měla položit otázku, zda některé její postupy nepřipomínají klopotnou práci, kterou by bylo nutno konat, kdybychom si při úvahách o číslech reálných zakázali myslet o číslech komplexních. Lze ovšem namítat, že příklad komplexních a reálných čísel je pro námi probíraný případ nevhodný, dokonce že je jím situace v matematické analýze tendenčně zkreslována.

Při takovýchto sporech však svářícím se stranám uniká mnohem závažnější skutečnost; totiž že vznik nestandardní analýzy umožnil jasně formulovat otázku, zda $\varepsilon\delta$-analýza dosáhla cíle, který si předsevzala. To znamená, zda se jejím prostřednictvím vskutku podařilo eliminovat nekonečně malé veličiny, aniž tím matematika utrpěla nějakou větší újmu. Tuto otázku lze například formulovat tak, zda každou vlastnost reálných funkcí, v jejíž definici jsou kvantifikována pouze čísla reálná a čísla nekonečně malá, lze ekvivalentně vyjádřit smysluplnou definicí, v níž jsou kvantifikována již jen čísla reálná (tedy nikoliv již čísla nekonečně malá).

V dodatku k této knize je uveden návod, podle nějž lze poměrně jednoduše takto do $\varepsilon\delta$-analýzy překládat jisté pojmy a jistá tvrzení, v jejichž formulacích se vyskytují nejvýše dvě střídající se kvantifikace nekonečně malých čísel. Toto pravidlo však již nelze zdánlivě nasnadě jsoucím způsobem zobecnit na případ většího počtu střídajících se kvantifikací nekonečně malých čísel, což dokázal Karel Čuda.

Tím je tedy vymezen okruh pojmů a tvrzení infinitezimálního kalkulu, které $\varepsilon\delta$--analýza tak říkajíc hravě zvládla. Patří mezi ně pojem limity, spojitosti, derivace prvního i vyšších řádů a podobně. Ke zvládnutí složitějších pojmů infinitezimálního kalkulu bez užití nekonečně malých veličin je však třeba vstupovat do složitějších množinových struktur a následkem toho názorné pojmy zachycovat prostřednictvím pojmů mnohem složitějších a méně názorných. Tím lze také vysvětlit, proč přetváření infinitezimálního kalkulu do $\varepsilon\delta$-analýzy probíhalo zprvu hladce, avšak v určitém okamžiku bylo nutno vypomáhat si metodami funkcionální analýzy, topologie, složitými metodami moderní diferenciální geometrie a podobně.

To ovšem nasvědčuje tomu, že $\varepsilon\delta$-analýza může dosáhnout vytčeného cíle jen s vydatnou pomocí teorie množin, spočívající v její široké nabídce nejrůznějších množinových struktur vhodně obalujících či doplňujících obor reálných čísel a funkcí. Není bez zajímavosti, že především pro tuto účast na problémech matematické analýzy byli matematici po jistém zdráhání nuceni uznat teorii množin za plnohodnotnou matematickou disciplínu; nic jiného jim totiž nezbývalo. Připustíme-li však, aby si $\varepsilon\delta$-analýza brala při dosahování svého cíle na pomoc různé struktury nabízené teorií množin, pak ale právě nestandardní modely teorie množin představují vůbec nejvhodnější množinovou strukturu, kterou může teorie množin k uvedenému účelu $\varepsilon\delta$-analýze nabídnout. Jinými slovy, právě vytvoření těchto modelů a s tím související vznik nestandardní analýzy je možno považovat za konečné dosažení cíle $\varepsilon\delta$-analýzy.

Naproti tomu považujeme-li za nepřípustné, aby si $\varepsilon\delta$-analýza brala při dosahování předsevzatého cíle na pomoc teorii množin, pak jsme ovšem nuceni konstatovat, že $\varepsilon\delta$-analýza tohoto cíle nedosáhla. Nejen to, často až fanatickým zatracováním nekonečně malých veličin uzavřela matematice jednu ze slibných cest rozvoje. Totiž přímé studium pojmů, v jejichž definicích se vyskytuje větší počet střídajících se kvantifikací nekonečně malých veličin, a vyhledávání tomu odpovídajících pravidel kalkulací. Následkem toho mnoho desetiletí trvající přesvědčení matematiků, že $\varepsilon\delta$-analýza je plnohodnotnou náhražkou infinitezimálního kalkulu, se řadí po bok největších omylů v myšlenkovém vývoji evropského lidstva.

První ze shora uvedených námitek proti nestandardní analýze je tedy mnohem závažnější než druhá. Nemůžeme ji totiž odmítnout, ledaže bychom se prohlásili za čisté formalisty, uznávající toliko syntaktickou stránku matematických teorií, aniž bychom si kladli otázku, o čem pojednávají. Takové rozhodnutí může sice učinit každý sám za sebe, nelze ho však vnutit ostatním matematikům, natož pak fyzikům či jiným uživatelům infinitezimálního kalkulu. Přes veškerou snahu některých matematiků zjednodušit výchozí předpoklady nestandardní analýzy, a tím ji pokud možno co nejvíce zpřístupnit, tato námitka trvá. Samotná nestandardní analýza není schopna se s ní vyrovnat; brání jí v tom meze, v nichž je sevřeno její pojetí.

Uvedená námitka může být odstraněna jedině tehdy, bude-li rehabilitován původní infinitezimální kalkul ve své nezkreslené podobě; tedy nikoliv jen techniky kalkulací s nekonečně malými veličinami, ale i původní intuice potřebná k zacházení s těmito veličinami. K tomu je ovšem nezbytné vyvést z nevědomí do vědomí onen podivný geometrický názor týkající se nekonečně malých veličin, jenž stál u zrodu infinitezimálního kalkulu.

Jinými slovy, je třeba jasně říci, co jsou nekonečně malé veličiny; ne ty, které studuje nestandardní analýza, ale ty, s nimiž odvážně a přitom bezpečně kalkulovali Newton, Leibniz a nejeden pozdější matematik či fyzik.

Právě o takto pojatou rehabilitaci infinitezimálního kalkulu v této knize jde.

1. Rozepnutí antického geometrického světa

V této knize o infinitezimálním kalkulu jsou obsaženy jen základní poznatky z diferenciálního počtu reálných funkcí jedné proměnné. Všechny pojmy a všechna tvrzení zde uvedené jsou jednoduše přeložitelné do $\varepsilon\delta$-analýzy, což si čtenář může ověřit v dodatku. Počet výchozích principů omezen na nejnutnější minimum, a to i za tu cenu, že přijetím některých dalších názorných principů (popřípadě podrobnějším rozvedením principů již přijatých) by bylo možno leccos předvést ještě jednodušším způsobem.

Abychom se nemuseli neustále odvolávat na předcházející knihy o nové infinitní matematice, uvedeme z nich nyní znovu stručně jen to, co je pro účely této třetí knihy dostatečné.

1.1 Antický a klasický geometrický svět

Do geometrického světa nenáležejí jen geometrické objekty, ale též vše, co se na nich ukazuje. Spolu s úsečkami tam tedy náležejí i jejich délky, což nám umožňuje zahrnout do tohoto světa i reálná čísla a následně i nejrůznější vztahy mezi nimi, tedy jmenovitě reálné funkce, posloupnosti čísel či funkcí a podobně.

O názorném antickém geometrickém světě jsme pojednávali v *Prolegomenech*[1] k nové infinitní matematice. Připomeňme, že jde o eukleidovský geometrický svět ohraničený obzorem, který jsme nazvali obzorem geometrickým. Třídu všech přirozených čísel v něm ležících označujeme FN.

V novověku došlo k nenápadnému (leč mohutnému) rozepnutí antického geometrického světa do absolutního nekonečna. Písmeno N označuje třídu všech přirozených čísel ležících v tomto klasickém geometrickém světě. (Protože množina všech přirozených čísel neexistuje[2], není ani N množinou všech přirozených čísel. V této čtvrté knize o infinitní matematice nemusíme tuto skutečnost brát na vědomí.)

Eukleidovské geometrické světy máme ovšem dva: **antický** a **klasický**. Abychom se mohli stručněji vyjadřovat, budeme antický svět označovat písmenem $\mathcal{A}$ a klasický geometrický svět písmenem $\mathcal{C}$. Zabýváme-li se jen jedním z nich, pak je ovšem lhostejné, který z nich to je. Poznatky získané v jednom z nich se v takovém případě týkají i druhého. Můžeme je však studovat oba současně, a sice v tom vztahu, do nějž jsou zasazeny. Tedy ve vztahu rozepnutí (expanze) $\mathcal{A}$ do $\mathcal{C}$, neboť klasický geometrický svět vznikl rozepnutím názorného antického geometrického světa.

Onu vnitřní nerozlišitelnost obou zmiňovaných geometrických světů můžeme zachytit následujícím způsobem.

[1] Petr Vopěnka (2015), *Nová infinitní matematika*, Prolegomena, kap. 1, s. 10.
[2] Viz *Prolegomena*, op. cit.

1.2 Zákony expanze

První zákon expanze. Je-li ψ vlastnost objektů náležejících do $\mathcal{A}$, která je formulována pouze prostředky světa $\mathcal{A}$ (tedy aniž bychom brali v úvahu existenci světa $\mathcal{C}$), pak ψ je též vlastnost objektů náležejících do světa $\mathcal{C}$ (tedy aniž bychom brali v úvahu existenci světa $\mathcal{A}$). Přitom ve světě $\mathcal{A}$ existuje objekt mající vlastnost ψ právě tehdy, když objekt mající vlastnost ψ existuje i ve světě $\mathcal{C}$.

Odtud okamžitě plyne:

Tvrzení 1.1. Všechny objekty světa $\mathcal{A}$ mají vlastnost ψ právě tehdy, když všechny objekty světa $\mathcal{C}$ mají vlastnost ψ.

Jakmile jsme do geometrického světa zahrnuli též čísla, pak ovšem taková čísla jako 1, 2, 3, ..., náležejí do $\mathcal{A}$ i do $\mathcal{C}$. Nejinak je tomu například s odmocninami, neboť reálné číslo, jehož druhou mocninou je, dejme tomu, číslo 3, se zajisté nachází v obou těchto geometrických světech. A to se týká všech námi nějak uchopitelných reálných čísel, tedy vlastně všech těch, která náležejí do světa $\mathcal{A}$.

Ztotožňování bodů geometrického světa s uspořádanými $n$ticemi reálných čísel pak umožňuje takto vykládat netoliko reálná čísla, ale vůbec všechny objekty náležející do $\mathcal{A}$. Proto přijmeme následující zákon, který zachycuje tuto domnělou totožnost světů $\mathcal{A}$ a $\mathcal{C}$, a kromě toho nám značně zjednoduší vyjadřování.

Druhý zákon expanze. Objekty náležející do $\mathcal{A}$ náležejí též do $\mathcal{C}$ (při rozepnutí $\mathcal{A}$ vstoupily do $\mathcal{C}$) a mají ve světě $\mathcal{C}$ tytéž vlastnosti a jsou v něm zasazeny do týchž vzájemných vztahů (formulovaných pouze prostředky světa $\mathcal{A}$, a tedy i pouze prostředky světa $\mathcal{C}$) jako ve světě $\mathcal{A}$.

Objekty náležející do světa $\mathcal{A}$ značíme stejně i ve světě $\mathcal{C}$. Odtud plyne následující užitečné pravidlo.

Pravidlo o definovaných objektech. Nechť ψ je vlastnost objektů, která je formulována pouze prostředky světa $\mathcal{A}$ (a tedy také jen prostředky světa $\mathcal{C}$). Nechť ve světě $\mathcal{C}$ existuje právě jeden objekt A, který má vlastnost ψ. Potom objekt A náleží do světa $\mathcal{A}$ a je jediným objektem světa $\mathcal{A}$, který má vlastnost ψ.

Důkaz. Je tomu tak proto, že podle Prvního zákona expanze existuje právě jeden objekt B ve světě $\mathcal{A}$, který má v tomto světě vlastnost ψ. Podle Druhého zákona expanze má B vlastnost ψ též ve světě $\mathcal{C}$, a tedy je $B = A$. □

Je-li $a_1, a_2, \ldots, a_n$ posloupnost objektů náležejících do světa $\mathcal{A}$, která je v tomto světě konečná, pak to znamená, že celá tato posloupnost je od prvního až do posledního členu přehlédnutelná, byť by to někdy vyžadovalo úsilí téměř až nadlidské.

Podle Druhého zákona expanze náleží tato posloupnost $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, stejně jako každý její člen a_1, a_2, ..., a_n , též do světa $\mathcal{C}$. Přitom ve světě $\mathcal{C}$ do ní žádný nový člen nepřibude. Kdyby totiž ve světě $\mathcal{C}$ existoval člen x této posloupnosti

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ takový, že $x \neq a_1, x \neq a_2, \ldots, x \neq a_n$, pak by podle Prvního zákona expanze takový její člen existoval i ve světě $\mathcal{A}$, což je spor.

U nekonečných posloupností je tomu ovšem jinak. Přitom klíčový je případ posloupnosti FN. Při rozepnutí $\mathcal{A}$ do $\mathcal{C}$ se tato posloupnost FN prodlouží do posloupnosti N.

Tedy zřejmě FN je řez na třídě N. Následkem toho se při rozepnutí $\mathcal{A}$ do $\mathcal{C}$ podobným způsobem prodlouží i každá nekonečná posloupnost náležející do $\mathcal{A}$.

1.3 Nekonečně velká přirozená čísla

Ta přirozená čísla ve světě $\mathcal{C}$, která náležejí do světa $\mathcal{A}$, to je prvky třídy FN, se nazývají **konečně velká přirozená čísla**.

Ta přirozená čísla ve světě $\mathcal{C}$, která do třídy N přibyla až po rozepnutí $\mathcal{A}$ do $\mathcal{C}$, se nazývají **nekonečně velká přirozená čísla**. Třídu všech těchto čísel budeme značit IN. Tedy platí

$$\mathrm{IN} = \mathrm{N} \setminus \mathrm{FN}.$$

Nechť dále $n \in \mathrm{FN}$ (popřípadě $n \in \mathrm{IN}$) označuje, že n je konečně velké (popřípadě nekonečně velké) přirozené číslo.

Třídy FN, IN nelze vydělit z třídy (posloupnosti) N vnitřními prostředky světa $\mathcal{C}$. Tyto třídy vlastně do světa $\mathcal{C}$ (chápaného samostatně) nenáležejí. Dostaly se tam zvenčí. Jsou z N vydělitelné teprve tehdy, když máme možnost zároveň porovnávat oba geometrické světy $\mathcal{A}$ a $\mathcal{C}$ ve vztahu rozepnutí $\mathcal{A}$ do $\mathcal{C}$.

Zřejmě platí následující tvrzení.

Tvrzení 1.2.

(i) Je-li $n \in \mathrm{FN}$, $m < n$, pak je $m \in \mathrm{FN}$.
(ii) Je-li $m \in \mathrm{IN}$, $m < n$, pak je $n \in \mathrm{IN}$.

Ve světě $\mathcal{A}$ je třída N tvořena pouze těmi přirozenými čísly, která jsou prvky třídy FN. Jinými slovy: ve světě $\mathcal{A}$ je každé přirozené číslo konečně velké. Následkem toho ve světě $\mathcal{C}$ platí následující tvrzení.

Tvrzení 1.3. Jsou-li $m, n \in \mathrm{FN}$, pak je též

$$m + n \in \mathrm{FN}, \quad n \cdot m \in \mathrm{FN}, \quad m^n \in \mathrm{FN}.$$

Tvrzení 1.4. Je-li $0 \neq m \in \mathrm{FN}$, $n \in \mathrm{IN}$, pak existují k, $l \in \mathrm{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} &k \leq \frac{n}{m} \leq k+1, && \text{kde } k \in \mathrm{IN}, \\ &l^m \leq n \leq (l+1)^m, && \text{kde } l \in \mathrm{IN}, \qquad \text{a tedy } \ n - m \in \mathrm{IN}. \end{aligned}$$

Poznámka. Ačkoliv ve světě $\mathcal{C}$ je třída IN neprázdnou částí třídy (posloupnosti) všech přirozených čísel, přesto nemá nejmenší prvek.

1.4 Nekonečně velká a nekonečně malá reálná čísla

Real označuje třídu reálných čísel ve světě $\mathcal{A}$. Při rozepnutí světa $\mathcal{A}$ do světa $\mathcal{C}$ se třída Real rozepne do třídy reálných čísel světa $\mathcal{C}$.

Řekneme, že reálné číslo x náležející do $\mathcal{C}$ je **nekonečně velké**, jestliže pro každé $n \in \mathrm{FN}$ je $n < |x|$.

Tvrzení 1.5. Reálné číslo x náležející do $\mathcal{C}$ je nekonečně velké právě tehdy, když existuje $n \in \mathrm{IN}$ takové, že $n < |x|$.

Důkaz. Nechť x je nekonečně velké. Buď n největší přirozené číslo takové, že $n < |x|$. Potom je $n \in \mathrm{IN}$, neboť kdyby bylo $n \in \mathrm{FN}$, bylo by

$$|x| \leq n + 1 \in \mathrm{FN},$$

což je spor. Obrácená implikace platí triviálně. □

Řekneme, že reálné číslo x náležející do $\mathcal{C}$ je **konečně velké**, jestliže není nekonečně velké.

Zřejmě platí následující tvrzení.

Tvrzení 1.6.

(i) Reálné číslo x náležející do $\mathcal{C}$ je konečně velké právě tehdy, když pro každé $n \in \mathrm{IN}$ je $|x| < n$.

(ii) Reálné číslo x náležející do $\mathcal{C}$ je konečně velké právě tehdy, když existuje $n \in \mathrm{FN}$ takové, že $|x| < n$.

Řekneme, že reálné číslo x náležející do $\mathcal{C}$ je **nekonečně malé**, je-li buď $x = 0$, nebo $x \neq 0$ a $\dfrac{1}{x}$ nekonečně velké.

Zřejmě platí také následující dvě tvrzení.

Tvrzení 1.7.

(i) Reálné číslo x náležející do $\mathcal{C}$ je nekonečně malé právě tehdy, jestliže pro každé $0 \neq n \in \mathrm{FN}$ je $|x| < \dfrac{1}{n}$.

(ii) Reálné číslo x náležející do $\mathcal{C}$ je nekonečně malé právě tehdy, když existuje $n \in \mathrm{IN}$ takové, že $|x| < \dfrac{1}{n}$.

Tvrzení 1.8.

(i) Každé reálné číslo náležející do $\mathcal{A}$ je konečně velké.

(ii) Žádné reálné číslo různé od 0 náležející do $\mathcal{A}$ není nekonečně malé.

Tvrzení 1.9. Jsou-li x, y reálná čísla náležející do $\mathcal{C}$ taková, že $x \cdot y$ je nekonečně malé číslo, pak buď x, nebo y je nekonečně malé číslo.

Důkaz. Kdyby existovala $m, n \in \mathrm{FN}$ taková, že $\dfrac{1}{m} < |x|$, $\dfrac{1}{n} < |y|$, bylo by

$$\frac{1}{mn} < |x \cdot y|$$

a podle tvrzení 1.3 by $x \cdot y$ nebylo nekonečně malé číslo. □

Tvrzení 1.10. Součin nekonečně malého a konečně velkého reálného čísla je nekonečně malé reálné číslo.

Důkaz. Nechť x, y jsou reálná čísla náležející do $\mathcal{C}$, $m \in \mathrm{FN}$, $n \in \mathrm{IN}$ taková, že $|y| < m$, $|x| < \frac{1}{n}$. Potom je $|x \cdot y| < \frac{m}{n}$. Nechť k je přirozené číslo takové, že

$$k < \frac{n}{m} \leq k + 1$$

Potom podle tvrzení 1.4 je $k \in \mathrm{IN}$ a $|x \cdot y| < \dfrac{m}{n} < \dfrac{1}{k}$. □

Tvrzení 1.11. Součet konečně mnoha nekonečně malých reálných čísel je nekonečně malé reálné číslo.

Důkaz. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou nekonečně malá reálná čísla náležející do $\mathcal{C}$, $n \in \mathrm{FN}$. Položme

$$x = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

Zřejmě x je nekonečně malé reálné číslo, $0 \leq x$. Přitom platí

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq nx,$$

což je podle tvrzení 1.10 nekonečně malé číslo. □

Tvrzení 1.12. Nechť x je reálné číslo náležející do $\mathcal{C}$, $m \in \mathrm{FN}$. Nechť číslo x^m je nekonečně malé. Potom též číslo x je nekonečně malé.

Důkaz. Nechť $n \in \mathrm{FN}$ je takové, že $\dfrac{1}{n} < |x|$. Potom je

$$\frac{1}{n^m} < |x^m|.$$

Avšak podle 1.3 je $n^m \in \mathrm{FN}$, a tedy x^m není nekonečně malé číslo, což je spor. □

1.5 Nekonečná blízkost

Řekneme, že reálná čísla x, y náležející do světa $\mathcal{C}$ jsou **nekonečně blízká**, označení $x \doteq y$, jestliže číslo $x - y$ je nekonečně malé.

Tvrzení 1.13. Nechť x, y, z jsou reálná čísla náležející do $\mathcal{C}$. Potom zřejmě platí:

(i) $x \doteq x$.
(ii) Je-li $x \doteq y$, pak je $y \doteq x$.
(iii) Je-li $x \doteq y$, $y \doteq z$, pak je $x \doteq z$.
(iv) Je-li $x \doteq y$, pak je-li x nekonečně velké, je i y nekonečně velké; je-li x konečně velké, je i y konečně velké; je-li x nekonečně malé, je i y nekonečně malé.

Tvrzení 1.14. Nechť x, y, u, v jsou reálná čísla náležející do $\mathcal{C}$ taková, že $x \doteq y$ a $u \doteq v$. Potom platí:

(i) $x + u \doteq y + v$, $x - u \doteq y - v$.
(ii) Jsou-li x, u konečně velká, pak je $x \cdot u \doteq y \cdot v$.
(iii) Není-li x nekonečně malé, pak je $\dfrac{1}{x} \doteq \dfrac{1}{y}$.
(iv) Jsou-li x, u konečně velká a není-li x nekonečně malé, pak je $\dfrac{u}{x} \doteq \dfrac{v}{y}$.

Důkaz. Případ (i) je triviálním důsledkem tvrzení 1.11. Případ (iv) je důsledkem případů (ii) a (iii).

K důkazu (ii) si stačí uvědomit, že

$$\begin{aligned} y \cdot v &= (x + (y - x)) \cdot (u + (v - u)) = \\ &= x \cdot u + x \cdot (v - u) + u \cdot (y - x) + (y - x) \cdot (v - u), \end{aligned}$$

přičemž podle tvrzení 1.10 jsou poslední tři sčítance nekonečně malá čísla.

K důkazu případu (iii) si stačí uvědomit, že

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \frac{y - x}{x \cdot y} \\ y - x &= (x \cdot y) \cdot \frac{y - x}{x \cdot y} \end{aligned}$$

přičemž číslo $x \cdot y$ ve jmenovateli není nekonečně malé. Kdyby tento podíl nebyl nekonečně malý, bylo by nekonečně malé číslo $y - x$ součinem čísel, z nichž žádné není nekonečně malé, což je spor s tvrzením 1.9. □

Tvrzení 1.15. Jsou-li x, y čísla náležející do světa $\mathcal{A}$, pak

$$x \doteq y \quad \text{právě tehdy, když} \quad x = y.$$

Neboli žádná dvě různá reálná čísla náležející do $\mathcal{A}$ nejsou nekonečně blízká.

Důkaz. Číslo $x - y$ náleží do $\mathcal{A}$ a podle tvrzení 1.8 je toto číslo nekonečně malé právě tehdy, když $x - y = 0$. $\square$

Tvrzení 1.16. Nechť x, y jsou konečně velká reálná čísla náležející do $\mathcal{C}$, která nejsou nekonečně blízká, $x < y$. Potom existují reálná čísla r, s náležející do $\mathcal{A}$ taková, že platí

$$x < r < s < y.$$

A také ovšem $x < r < \dfrac{r+s}{2} < s < y$ a podobně.

Důkaz. Nechť nejprve $0 \leq x < y$. Buďte $m, n \in \mathrm{FN}$ taková, že

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{3}(y - x), \quad y < m.$$

Buď k nejmenší přirozené číslo takové, že $x < \dfrac{k}{n}$. Potom je

$$x < \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} < y < m,$$

tedy $k < m \cdot n$, následkem čehož je $k \in \mathrm{FN}$. To ale znamená, že čísla $\dfrac{k}{n}$ a $\dfrac{k+1}{n}$ náležejí do $\mathcal{A}$.

Je-li $x < y \leq 0$, pak je $0 \leq -y < -x$, čímž je tento případ převeden na případ předcházející.

Nechť $x < 0 < y$. Potom buď není $x \doteq 0$, nebo není $y \doteq 0$. Podle předcházející části důkazu existují reálná čísla r a s náležející do $\mathcal{A}$ taková, že

$$\begin{array}{llll} \text{není-li} & x \doteq 0, & \text{je} & x < r < s < 0, \\ \text{není-li} & y \doteq 0, & \text{je} & 0 < r < s < y. \end{array}$$ $\square$

1.6 Zákony zpětné projekce

Pokoušíme-li se dohlédnout až k nějakému geometrickému bodu X ležícímu ve světě $\mathcal{C}$, ale ne ve světě $\mathcal{A}$ (tedy až někde za geometrickým obzorem), pak k tomuto bodu nedohlédneme. Náš pohled se zastaví na nějakém bodě Y ležícím ve světě $\mathcal{A}$, jímž je bod X zakryt. (Jinými slovy: bod X ležící v $\mathcal{C}$ se zpětně promítne do bodu Y). Po rozepnutí eukleidovského světa $\mathcal{A}$ do světa $\mathcal{C}$, kdy se bod Y propadne do světa $\mathcal{C}$, jsou v tomto světě body X, Y nekonečně blízké.

Převedeme-li tuto úvahu do řeči reálných čísel, obdržíme následující zákon:

První zákon zpětné projekce. Při zpětné projekci světa $\mathcal{C}$ na svět $\mathcal{A}$ se každé konečně velké reálné číslo x náležející do $\mathcal{C}$ promítne na jemu nekonečně blízké reálné číslo y náležející do $\mathcal{A}$.

Protože podle tvrzení 1.15 žádná dvě různá reálná čísla náležející do $\mathcal{A}$ nejsou nekonečně blízká, platí následující tvrzení.

Tvrzení 1.17. Je-li x konečně velké reálné číslo náležející do $\mathcal{C}$, pak existuje právě jedno reálné číslo y náležející do $\mathcal{A}$ takové, že $x \doteq y$.

Poznámka. Zpětnou projekci čísla $x \in \mathcal{C}$ do prostoru $\mathcal{A}$ z předchozí věty budeme značit $\mathrm{Proj}(x)$.

Z tvrzení 1.14 bezprostředně plyne následující tvrzení.

Tvrzení 1.18. Nechť x, y jsou konečně velká reálná čísla náležející do $\mathcal{C}$. Potom platí:

(i) $\mathrm{Proj}(x+y) = \mathrm{Proj}(x) + \mathrm{Proj}(y)$.
(ii) $\mathrm{Proj}(x-y) = \mathrm{Proj}(x) - \mathrm{Proj}(y)$.
(iii) $\mathrm{Proj}(x \cdot y) = \mathrm{Proj}(x) \cdot \mathrm{Proj}(y)$.
(iv) Je-li $\mathrm{Proj}(y) \neq 0$, pak je

$$\mathrm{Proj}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\mathrm{Proj}(x)}{\mathrm{Proj}(y)}.$$

Tvrzení 1.19. Nechť x, y jsou konečně velká reálná čísla z $\mathcal{C}$, $x < y$. Potom je

$$\mathrm{Proj}(x) \leq \mathrm{Proj}(y),$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když je $x \doteq y$.

Důkaz. Podle tvrzení 1.18 je $\mathrm{Proj}(y-x) = \mathrm{Proj}(y) - \mathrm{Proj}(x)$. Odtud plyne

$$x \doteq y \quad \text{právě tehdy, když} \quad \mathrm{Proj}(y-x) = 0,$$

což nastane právě tehdy, když $\mathrm{Proj}(x) = \mathrm{Proj}(y)$.

Nechť $\mathrm{Proj}(y-x) \neq 0$. Potom $\mathrm{Proj}(y-x) < 0$ by mělo za následek

$$(y-x) - \mathrm{Proj}(y-x) > |\,\mathrm{Proj}(y-x)|.$$

Protože $\mathrm{Proj}(y-x)$ náleží do $\mathcal{A}$, nebyla by čísla $(y-x)$ a $\mathrm{Proj}(y-x)$ nekonečně blízká. Je tedy

$$\mathrm{Proj}(y-x) > 0, \quad \text{a tedy} \quad \mathrm{Proj}(y) > \mathrm{Proj}(x). \qquad \square$$

Pokoušíme-li se dohlédnout na nějaké nekonečně velké reálné číslo náležející do $\mathcal{C}$, zastaví se náš pohled na jakémsi úběžníku, jenž se dodatečně objevil za všemi reálnými čísly náležejícími do $\mathcal{A}$. To nás vede k přijetí následujícího zákona.

Druhý zákon zpětné projekce. Při zpětné projekci $\mathcal{C}$ na $\mathcal{A}$ se každé kladné (popřípadě záporné) nekonečně velké reálné číslo náležející do $\mathcal{C}$ promítne na navíc se objevivší číslo ve světě $\mathcal{A}$, které značíme ∞ (popřípadě $-\infty$).

O čísla ∞, $-\infty$ je tedy rozšířen svět $\mathcal{A}$. Původně do něj tato čísla nepatřila. Objevila se v něm až po rozepnutí $\mathcal{A}$ do $\mathcal{C}$. Jsou to tedy **nevlastní reálná čísla** náležející do $\mathcal{A}$. (A podle Druhého zákona expanze vstoupila také do světa $\mathcal{C}$.)