Základy náhodných procesů II

Zuzana Prášková

UNIVERZITA KARLOVA
NAKLADATELSTVÍ KAROLINUM

Základy náhodných procesů II

Zuzana Prášková

Recenzovali:
doc. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.
Mgr. David Kraus

Vydala Univerzita Karlova, Nakladatelství Karolinum
jako učební text pro MFF UK
Sazba Zuzana Prášková s použitím typografického systému LaTeX
2., upravené vydání

ISBN 978-80-246-3516-3
ISBN 978-80-246-3529-3 (online : pdf)

Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum 2016

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Předmluva

Toto je druhé vydání učebního textu k předmětu Náhodné procesy 2 pro posluchače MFF UK, kteří studují magisterský studijní program Matematika ve studijních oborech Finanční a pojistná matematika a Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie. Navazuje na učební texty Prášková, Z., Lachout, P.: Základy náhodných procesů (Karolinum, Praha 1998, 2001, 2005) a Prášková, Z., Lachout, P.: Základy náhodných procesů I (Matfyzpress, Praha 2012) k přednášce Náhodné procesy 1.

Výklad látky začíná opakováním základních vlastností náhodných procesů z předchozího kursu, které doplňuje o nové souvislosti, dále však již pokračuje nezávisle a soustřeďuje se na teorii stacionárních procesů s diskrétním i spojitým časem. Předpokládá pokročilejší znalosti z teorie pravděpodobnosti (např. z přednášky Pravděpodobnost 1) a také základní znalosti funkcionální a komplexní analýzy a matematické statistiky (např. Úvod do funkcionální analýzy, Úvod do komplexní analýzy, Matematická statistika 1).

Do tohoto vydání byly zahrnuty některé zkušenosti z výuky, text byl částečně modifikován a rozšířen. Kapitola 11 je zcela nová. Text byl rovněž doplněn o další literaturu.

autorka

Seznam použitých symbolů

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0$	množina nezáporných celých čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\boldsymbol{x}$	sloupcový vektor
$\boldsymbol{A}$	obecná matice
$\boldsymbol{I}$	jednotková matice
$\|\| \cdot \|\|$	norma prvku
$\mathcal{B}$	borelovská $\sigma-$algebra
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	normální rozdělení s parametry μ, σ^2
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	náhodná veličina s rozdělením $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
$\{X_t, t \in T\}$	proces náhodných veličin
$\mathcal{M}\{X_t, t \in T\}$	lineární obal procesu $\{X_t, t \in T\}$
$\mathcal{H}\{X_t, t \in T\}$	Hilbertův prostor vytvořený náhodným procesem $\{X_t, t \in T\}$
$X \perp Y$	ortogonální náhodné veličiny
$\overline{\lim}$	limes superior
$\xrightarrow{\text{P}}$	konvergence v pravděpodobnosti
$\xrightarrow{\text{D}}$	konvergence v distribuci
l. i. m.	konvergence podle kvadratického středu

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Definice a základní charakteristiky náhodného procesu

Definice 1.1. Nechť $(\Omega,\mathcal{A},P)$ je pravděpodobnostní prostor, nechť $T \subset \mathbb{R}$ a $(S,\mathcal{E})$ je obecný měřitelný prostor. Rodina náhodných veličin $\{X_t,\ t \in T\}$ definovaných na $(\Omega,\mathcal{A},P)$ s hodnotami v S se nazývá *náhodný proces.*

V případě, že $T = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ nebo $T \subset \mathbb{Z}$, mluvíme o *procesu s diskrétním časem* nebo o *časové řadě*. Pokud $T = [a,b]$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, říkáme, že $\{X_t,\ t \in T\}$ je *proces se spojitým časem.* Pokud $S = \mathbb{R}$, říkáme, že $\{X_t,\ t \in T\}$ je *reálný náhodný proces.*

Definice 1.2. Dvojice $(S,\mathcal{E})$, kde S je množina hodnot náhodných veličin X_t a $\mathcal{E}$ je $\sigma-$algebra podmnožin S, se nazývá *stavový prostor* procesu $\{X_t,\ t \in T\}$. Pokud náhodné veličiny X_t nabývají pouze diskrétních hodnot, říkáme, že jde o *proces s diskrétními stavy*, nabývají-li hodnot z nějakého intervalu, mluvíme o *procesu se spojitými stavy.*

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ můžeme chápat jako funkci dvou proměnných ω, t. Pro pevné $t \in T$ je $X_t = X_t(.)$ náhodná veličina definovaná na Ω; pro pevné $\omega \in \Omega$ je $X_{(.)} = X_{(.)}(\omega)$ funkcí proměnné t. Této funkci říkáme *trajektorie procesu* $\{X_t,\ t \in T\}$.

Definice 1.3. Reálný stochastický proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá *měřitelný*, jestliže zobrazení $(\omega, t) \to X_t(\omega)$ je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_T-$měřitelné, kde $\mathcal{B}_T$ je $\sigma-$algebra borelovských podmnožin T a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_T$ značí součinovou $\sigma-$algebru.

Každé konečné podmnožině $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ lze přiřadit systém náhodných veličin $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$, které mají sdružené rozdělení s distribuční funkcí

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n).$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ a $t_1, \dots, t_n \in T$ má systém distribučních funkcí $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$ následující vlastnosti: Pro libovolnou permutaci $i_1, \dots, i_n$ čísel $1, \dots, n$ platí

$$F_{t_{i_1},\dots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) \tag{1.1}$$

a

$$\lim_{x_{n+1} \to \infty} F_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n). \tag{1.2}$$

Systém distribučních funkcí s uvedenými vlastnostmi se nazývá *konzistentní.* Ke každému náhodnému procesu existuje konzistentní systém distribučních funkcí. Naopak platí

Věta 1.1 (Daniellova-Kolmogorovova)**.** *Nechť $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$ je konzistentní systém distribučních funkcí. Potom existuje náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, libovolná $t_1, \dots, t_n \in T$ a libovolná reálná $x_1, \dots, x_n$ platí*

$$P(X_{t_1} \le x_1, \dots, X_{t_n} \le x_n) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Důkaz. Štěpán (1987), věta I.10.3. $\square$

Definice 1.4. *Komplexní náhodná veličina* X se definuje jako $X = Y + iZ$, kde Y a Z jsou reálné náhodné veličiny. Pokud existují střední hodnoty $\mathrm{E}Y$ a $\mathrm{E}Z$, definujeme střední hodnotu komplexní náhodné veličiny X jako $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y + i\mathrm{E}Z$. Existují-li druhé momenty náhodných veličin Y a Z, definujeme rozptyl náhodné veličiny X jako

$$\operatorname{var} X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)(\overline{X} - \overline{\mathrm{E}X}) = \mathrm{E}|X - \mathrm{E}X|^2,$$

což je vždy nezáporné číslo.

Komplexní náhodný proces je definován jako rodina komplexních náhodných veličin na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Definice 1.5. Nechť $\{X_t,\ t \in T\}$ je náhodný proces takový, že pro každé $t \in T$ existuje střední hodnota $\mathrm{E}X_t$. Potom funkce $\mu_t = \mathrm{E}X_t$ definovaná na T se nazývá *střední hodnota procesu* $\{X_t,\ t \in T\}$. Proces, jehož střední hodnota je identicky rovna nule, se nazývá *centrovaný.*

Jestliže $\{X_t,\ t \in T\}$ je proces s konečnými druhými momenty, tj. $\mathrm{E}|X_t|^2 < \infty$ pro všechna $t \in T$, potom (obecně komplexní) funkce dvou proměnných definovaná na $T \times T$ předpisem $R(s,t) = \mathrm{E}(X_s - \mu_s)(\overline{X}_t - \overline{\mu}_t)$ se nazývá *autokovarianční funkce procesu* $\{X_t,\ t \in T\}$. Hodnota $R(t,t)$ se nazývá *rozptyl procesu* v čase t.

Autokorelační funkce procesu $\{X_t,\ t \in T\}$ s kladnými rozptyly je definována jako

$$r(s,t) = \frac{R(s,t)}{\sqrt{R(s,s)}\sqrt{R(t,t)}}, \quad s,t \in T.$$

Definice 1.6. Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá *gaussovský (normální),* jsou-li všechna jeho konečněrozměrná rozdělení normální, tj. jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $t_1, \ldots ,t_n \in T$ má vektor $(X_{t_1}, \ldots ,X_{t_n})'$ $n-$rozměrné normální rozdělení $\mathcal{N}_n(\mathbf{m_t},\mathbf{V_t})$, kde $\mathbf{m_t} = (\mathrm{E}X_{t_1}, \ldots ,\mathrm{E}X_{t_n})'$ a

$$\mathbf{V_t} = \begin{pmatrix} \mathrm{var}X_{t_1} & \mathrm{cov}(X_{t_1},X_{t_2}) & \ldots & \mathrm{cov}(X_{t_1},X_{t_n}) \\ \mathrm{cov}(X_{t_2},X_{t_1}) & \mathrm{var}X_{t_2} & \ldots & \mathrm{cov}(X_{t_2},X_{t_n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{cov}(X_{t_n},X_{t_1}) & \mathrm{cov}(X_{t_n},X_{t_2}) & \ldots & \mathrm{var}X_{t_n} \end{pmatrix}.$$

1.1.1 Striktní a slabá stacionarita

Definice 1.7. Řekneme, že náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ je *striktně stacionární,* jestliže pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, pro libovolná reálná $x_1, \ldots ,x_n$ a pro libovolná $t_1, \ldots ,t_n$ a h taková, že $t_k \in T, t_k + h \in T, 1 \le k \le n$, platí

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots ,x_n) = F_{t_1+h,\ldots,t_n+h}(x_1, \ldots ,x_n).$$

Je-li proces $\{X_t,\ t \in T\}$ striktně stacionární, pak všechny náhodné veličiny X_t mají stejné rozdělení a základní charakteristiky (střední hodnota, rozptyl, kovariance, ...) se nemění při posunutí v čase. Zavedeme ještě méně přísnou definici stacionarity.

Definice 1.8. Náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ s konečnými druhými momenty se nazývá *slabě stacionární*, má-li konstantní střední hodnotu $\mu_t = \mu$ pro všechna $t \in T$ a je-li jeho autokovarianční funkce $R(s,t)$ funkcí pouze $s - t$. Je-li splněna pouze podmínka na autokovarianční funkci, mluvíme o *kovarianční stacionaritě.*

Poznámka 1.1. Autokovarianční funkci slabě stacionárních procesů lze definovat jako funkci jedné proměnné vztahem $R(t) := R(t,0),\ t \in T$; autokorelační funkce je potom dána předpisem $r(t) = R(t)/R(0)$.

Věta 1.2. *Striktně stacionární náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ s konečnými druhými momenty je i slabě stacionární.*

Důkaz. Je zřejmý, neboť ze striktní stacionarity plyne, že náhodné veličiny X_t mají pro všechna $t \in T$ stejné rozdělení a tedy stejnou konečnou střední hodnotu a podobně náhodné veličiny X_t a X_{t+h} mají pro všechna $t \in T$ a každé h takové, že $t \in T, t+h \in T$, stejné sdružené rozdělení a tedy stejné kovariance. □

Opačné tvrzení obecně neplatí; např. posloupnost $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ definovaná předpisem $X_t = (-1)^t X$, kde X je náhodná veličina nabývající hodnoty $-\frac{1}{4}$ s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ a hodnoty $\frac{3}{4}$ s pravděpodobností $\frac{1}{4}$, je slabě stacionární, neboť $\mathrm{E}X_t = 0, \mathrm{var}\, X_t = \sigma^2 = \frac{3}{16}, R(s,t) = \sigma^2(-1)^{s+t} = \sigma^2(-1)^{s-t}$, ale není striktně stacionární. Platí však

Věta 1.3. *Slabě stacionární gaussovský proces $\{X_t,\ t \in T\}$ je i striktně stacionární.*

Důkaz. Ze slabé stacionarity procesu $\{X_t,\ t \in T\}$ plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a libovolné $t_1, \ldots, t_n, h$ mají náhodné vektory $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ a $(X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h})$ stejnou střední hodnotu a stejnou (konečnou) varianční matici. Protože normální rozdělení je těmito charakteristikami určeno jednoznačně, musí mít tyto vektory stejné rozdělení. $\square$

1.1.2 Vlastnosti autokovarianční funkce

Uveďme nyní základní vlastnosti autokovarianční funkce.

Věta 1.4. *Nechť $\{X_t,\ t \in T\}$ je proces s konečnými druhými momenty. Potom pro jeho autokovarianční funkci platí*

$$R(t,t) \geq 0,$$
$$|R(s,t)| \leq \sqrt{R(s,s)}\sqrt{R(t,t)}.$$

Důkaz. První vlastnost je vlastnost rozptylu. Druhá vlastnost plyne ze Schwarzovy nerovnosti, neboť

$$\begin{aligned} |R(s,t)| &= |\mathrm{E}(X_s - \mathrm{E}X_s)(\overline{X_t} - \overline{\mathrm{E}X_t})| \leq \mathrm{E}|(X_s - \mathrm{E}X_s)(\overline{X_t} - \overline{\mathrm{E}X_t})| \\ &\leq (\mathrm{E}|X_s - \mathrm{E}X_s|^2)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{E}|X_t - \mathrm{E}X_t|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R(s,s)}\sqrt{R(t,t)}. \end{aligned}$$

$\square$

Poznámka 1.2. Pro slabě stacionární proces je tedy $R(0) \geq 0$ a $|R(t)| \leq R(0)$.

Definice 1.9. Nechť $f(s,t)$ je obecně komplexní funkce definovaná na $T \times T$, $T \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f je *pozitivně semidefinitní*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$, libovolná komplexní čísla $c_1, \ldots, c_n$ a libovolné body $t_1, \ldots, t_n \in T$ platí

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c_k} f(t_j,t_k) \geq 0. \tag{1.3}$$

Říkáme, že komplexní funkce g jedné proměnné na T je pozitivně semidefinitní, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$, libovolná komplexní čísla $c_1, \ldots, c_n$ a libovolné body $t_1, \ldots, t_n \in T$, takové že $t_j - t_k \in T$, platí

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c_k} g(t_j - t_k) \geq 0. \tag{1.4}$$

Definice 1.10. Řekneme, že komplexní funkce f na $T \times T$ je *hermitovsky symetrická*, jestliže $f(s,t) = \overline{f(t,s)}$ pro všechna $s,t \in T$.

Komplexní funkce g jedné proměnné se nazývá hermitovsky symetrická, když pro všechna $t \in T$ je $g(-t) = \overline{g(t)}$.

Věta 1.5. *Pozitivně semidefinitní funkce je i hermitovsky symetrická.*

Důkaz. V definici 1.9 pro $n = 1$ stačí zvolit $c_1 = 1$; pro $n = 2$ stačí zvolit $c_1 = 1, c_2 = 1$ a dále $c_1 = 1, c_2 = i (= \sqrt{-1})$. □

Poznámka 1.3. Reálná funkce f dvou proměnných na $T \times T$, která je pozitivně semidefinitní, je symetrická, tj. $f(s,t) = f(t,s)$ pro všechny body $s,t \in T$. Pro reálnou funkci g jedné proměnné na T z pozitivní semidefinitnosti plyne $g(t) = g(-t)$ pro každé $t \in T$.

Věta 1.6. *Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je proces s konečnými druhými momenty. Potom jeho autokovarianční funkce je pozitivně semidefinitní na $T \times T$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že proces je centrovaný. Potom pro každé přirozené číslo n, komplexní konstanty $c_1, \ldots, c_n$ a body $t_1, \ldots, t_n \in T$ platí

$$0 \leq \mathrm{E}\left|\sum_{j=1}^n c_j X_{t_j}\right|^2 = \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^n c_j X_{t_j} \overline{\sum_{k=1}^n c_k X_{t_k}}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \overline{c_k} \mathrm{E}(X_{t_j} \overline{X_{t_k}}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \overline{c_k} R(t_j,t_k).$$

□

Věta 1.7. *Ke každé pozitivně semidefinitní funkci R na $T \times T$ existuje náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ s konečnými druhými momenty takový, že R je jeho autokovarianční funkcí.*

Důkaz. Větu dokážeme pouze pro reálnou funkci R. Důkaz pro obecnou pozitivně semidefinitní funkci lze nalézt např. v Loève (1955), kap. X, odst. 34.

Z pozitivní semidefinitnosti funkce R plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a libovolná reálná čísla $t_1, \ldots, t_n \in T$ je matice

$$\mathbf{V_t} = \begin{pmatrix} R(t_1,t_1) & R(t_1,t_2) & \ldots & R(t_1,t_n) \\ R(t_2,t_1) & R(t_2,t_2) & \ldots & R(t_2,t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R(t_n,t_1) & R(t_n,t_2) & \ldots & R(t_n,t_n) \end{pmatrix}$$

pozitivně semidefinitní. Funkce $\varphi(\mathbf{u}) = \exp\{-\frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{V_t}\mathbf{u}\}$ pro $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ je charakteristickou funkcí normálního rozdělení $\mathcal{N}_n(\mathbf{0},\mathbf{V_t})$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a libovolná reálná čísla $t_1, \ldots, t_n \in T$ takto vytvoříme systém charakteristických funkcí, jemuž odpovídá systém normálních distribučních funkcí, který je konzistentní. Tudíž podle Daniellovy-Kolmogorovovy věty existuje gaussovský náhodný proces, jehož všechny vzájemné kovariance jsou určeny hodnotami funkce $R(s,t)$; funkce R je tedy jeho autokovarianční funkce. □

Příklad 1.1. Zjistěte, zda funkce $\cos t$, $t \in T = (-\infty,\infty)$, je autokovarianční funkce nějakého náhodného procesu.

Řešení: Stačí ověřit, že funkce $\cos t$ je pozitivně semidefinitní. Nechť je $n \in \mathbb{N}$, $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{C}$ a $t_1,\dots,t_n \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\bar{c}_k \cos(t_j - t_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\bar{c}_k(\cos t_j \cos t_k + \sin t_j \sin t_k)$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{n} c_j \cos t_j\right|^2 + \left|\sum_{k=1}^{n} c_k \sin t_k\right|^2 \geq 0.$$

Funkce $\cos t$ je tedy pozitivně semidefinitní, a proto podle věty 1.7 existuje (gaussovský) náhodný proces $\{X_t,\, t \in T\}$, jehož autokovarianční funkce je $R(s,t) = \cos(s-t)$.

Věta 1.8. *Součet dvou pozitivně semidefinitních funkcí je pozitivně semidefinitní funkce.*

Důkaz. Tvrzení plyne z definice pozitivně semidefinitní funkce, neboť jsou-li funkce f a g pozitivně semidefinitní a $h = f + g$, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, komplexní konstanty $c_1,\dots,c_n$ a body $t_1,\dots,t_n \in T$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\bar{c}_k h(t_j,t_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\bar{c}_k[f(t_j,t_k) + g(t_j,t_k)]$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\bar{c}_k f(t_j,t_k) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\bar{c}_k g(t_j,t_k) \geq 0.$$

□

Věta 1.9. *Součet dvou autokovariančních funkcí je autokovarianční funkce nějakého náhodného procesu s konečnými druhými momenty.*

Důkaz. Tvrzení je jednoduchým důsledkem vět 1.6, 1.7 a 1.8.

□

Věta 1.10. *Reálná část autokovarianční funkce je také autokovarianční funkcí. Imaginární část je autokovarianční funkcí jen tehdy, je-li identicky rovná nule.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti dokážeme jen pro centrované procesy. Je-li $X_t = Y_t + iZ_t$ komplexní proces s nulovou střední hodnotou, pak $\mathrm{E}Y_t = \mathrm{E}Z_t = 0$ a $R(s,t) = \mathrm{E}X_s\overline{X}_t = \mathrm{E}(Y_s + iZ_s)(Y_t - iZ_t) = \mathrm{E}Y_sY_t + \mathrm{E}Z_sZ_t + i(\mathrm{E}Z_sY_t - \mathrm{E}Y_sZ_t)$. Reálná část je autokovarianční funkcí podle předchozí věty. Protože pro $s = t$ je imaginární část nulová, platí i druhé tvrzení.

□

1.2 Některé důležité třídy náhodných procesů

Stacionární procesy tvoří velmi důležitou třídu náhodných procesů. V následujících kapitolách se budeme zabývat převážně slabě stacionárními procesy. V tomto odstavci se zmíníme ještě o dalších vlastnostech a třídách náhodných procesů.

1.2.1 Markovovy procesy

Definice 1.11. Řekneme, že proces $\{X_t,\, t \geq 0\}$ je *Markovův proces* se stavovým prostorem $(S,\mathcal{E})$, jestliže pro libovolné $t_0, t_1, \dots ,t_n,\; 0 \leq t_0 < t_1 \cdots < t_n$, platí

$$P(X_{t_n} \leq x | X_{t_{n-1}}, \dots , X_{t_0}) = P(X_{t_n} \leq x | X_{t_{n-1}}) \text{ s. j.} \tag{1.5}$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Vlastnost (1.5) se nazývá *markovská vlastnost.* Jednoduchými případy jsou Markovovy procesy s diskrétními stavy, neboli Markovovy řetězce s diskrétním a spojitým časem, které jsou popsány např. v Prášková a Lachout (2005) nebo v Prášková a Lachout (2012).

Příklad 1.2. Uvažujme Markovův řetězec $\{X_t,\, t \geq 0\}$ s množinou stavů $S = \{0,1\}$ a spojitým časem, jehož počáteční rozdělení je $P(X_0 = 0) = 1, P(X_0 = 1) = 0$, a jehož matice intenzit je

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix},$$

$\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Zkoumejme stacionaritu tohoto procesu. Víme, že všechna konečněrozměrná rozdělení daného řetězce jsou dána počátečním rozdělením a soustavou matic pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}(t) = \{p_{ij}(t), i,j \in S\}$ pro všechna $t \geq 0$ (Prášková a Lachout, 2012, odst. 3.1). Matice $\mathbf{P}(t)$ jsou v tomto případě tvaru (viz Prášková a Lachout, 2012, příklad 3.4)

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha - \alpha e^{-(\alpha+\beta)t} \\ \beta - \beta e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha + \beta e^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}.$$

Nyní máme vzhledem k počátečnímu rozdělení

$$P(X_t = 0) = p_{00}(t) = \frac{1}{\alpha + \beta}(\beta + \alpha e^{-(\alpha+\beta)t}),$$

což závisí na t, a podobně dostaneme $P(X_t = 1) = p_{01}(t) = \mathrm{E}X_t$. Proces tedy není striktně, ani slabě stacionární.

Pokud ale počáteční rozdělení je stacionární rozdělení daného Markovova řetězce, potom $\{X_t,\ t \geq 0\}$ je striktně stacionární proces (věta 3.12 v Prášková a Lachout, 2012) se střední hodnotou $\mathrm{E}X_t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ a autokovarianční funkcí

$$R(s,t) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} e^{-(\alpha+\beta)|s-t|}.$$

Je tedy i slabě stacionární.

1.2.2 Procesy s nezávislými přírůstky

Definice 1.12. Řekneme, že proces $\{X_t,\ t \in T\}$, kde T je interval, má *nezávislé přírůstky*, jestliže pro každé $t_1,t_2,\ldots,t_n \in T$ s vlastností $t_1 < t_2 \cdots < t_n$ jsou náhodné veličiny $X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezávislé. Jestliže pro každé $s,t \in T$, $s < t$, rozdělení přírůstků $X_t - X_s$ závisí pouze na $t - s$, řekneme, že proces $\{X_t,\ t \in T\}$ má *stacionární přírůstky.*

Procesem s nezávislými a stacionárními přírůstky je např. *Poissonův proces* s intenzitou λ, což je Markovův řetězec $\{X_t,\ t \geq 0\}$ se spojitým časem takový, že $X_0 = 0$ s. j. a pro $t > 0$ mají náhodné veličiny X_t Poissonovo rozdělení s parametrem λt. Přírůstky $X_t - X_s$ pro $s < t$ mají Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda(t-s)$. Podrobněji je Poissonův proces popsán např. v Prášková a Lachout (2012), odst. 3.4.

Jak můžeme snadno nahlédnout, rozdělení přírůstků $X_t - X_s$ závisí skutečně jen na $t - s$. Poissonův proces ale není stacionární ani ve striktním, ani v slabém smyslu.

Jiný důležitý proces s nezávislými a stacionárními přírůstky je *Wienerův proces* (někdy též nazývaný proces *Brownova pohybu).* Je definován jako gaussovský náhodný proces $\{W_t, t \geq 0\}$ s následujícími vlastnostmi:

1. $W_0 = 0$ s. j. a $\{W_t, t \geq 0\}$ má spojité trajektorie.

2. Pro libovolné časové okamžiky $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ jsou přírůstky $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ nezávislé náhodné veličiny.

3. Pro libovolné časové okamžiky $0 \leq t < s$ mají přírůstky $W_s - W_t$ normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma^2(s-t)$, kde σ^2 je kladná konstanta. Speciálně, pro každé $t \geq 0$ je $\mathrm{E}W_t = 0$ a $\operatorname{var} W_t = \sigma^2 t$.

Jak je vidět, ani Wienerův proces není stacionární ve smyslu definic z odstavce 1.1.1.

1.2.3 Martingaly

Uvedeme jen základní definice.

Definice 1.13. Nechť $(\Omega,\mathcal{A},P)$ je pravděpodobnostní prostor, nechť $T \subset \mathbb{R}, T \neq \emptyset$. Nechť pro každé $t \in T$ je dána σ-algebra $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$. Potom systém σ-algeber $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ takový, že $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pro každé $s,t \in T, s < t$, se nazývá *filtrace.*

Definice 1.14. Nechť $\{X_t,\, t \in T\}$ je náhodný proces definovaný na $(\Omega,\mathcal{A},P)$ a nechť $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ je filtrace. Jestliže náhodná veličina X_t je $\mathcal{F}_t$-měřitelná pro každé $t \in T$, řekneme, že $\{X_t,\, t \in T\}$ je *adaptovaný* na $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$.

Definice 1.15. Nechť $\{X_t,\, t \in T\}$ je náhodný proces adaptovaný na filtraci $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ a $\mathrm{E}|X_t| < \infty$ pro všechna $t \in T$. Tento proces se nazývá *martingal* vzhledem k filtraci $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$, jestliže $\mathrm{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_t$ s. j. pro každé $s < t, s, t \in T$.

Poznámka 1.4. Jestliže $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ je σ-algebra generovaná náhodnými veličinami procesu do času t, potom $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ se nazývá kanonická nebo přirozená filtrace. Pokud se hovoří jen o martingalu, většinou jde o právě o martingal vzhledem ke kanonické filtraci. Teorií martingalů se zabývá např. učebnice Štěpán (1987).

1.3 Cvičení a doplňky

Cvičení 1.1. Nechť $\{X_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Dokažte, že je striktně stacionární. Je také slabě stacionární?

Cvičení 1.2. Nechť $\{X_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nekorelovaných náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konečným kladným rozptylem. Dokažte, že je slabě stacionární. Je také striktně stacionární?

Cvičení 1.3. Nechť

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_t &= Y_1 + \cdots + Y_t, \quad t = 1,2,\ldots, \end{aligned}$$

kde $Y_1,Y_2,\ldots$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a konečným kladným rozptylem. Dokažte, že posloupnost $\{X_t,\, t \in \mathbb{N}_0\}$ je Markovův řetězec. Spočtěte autokovarianční funkci této posloupnosti. Co lze říci o striktní, resp. slabé stacionaritě této náhodné posloupnosti ?

Cvičení 1.4. Rozhodněte o stacionaritě posloupnosti $\{X_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ definované pro každé t předpisem

$$X_t = a + bY_t + cY_{t-1},$$

kde a, b, c jsou konstanty a Y_t jsou nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením.

Cvičení 1.5. Nechť $X_t = a + bt + Y_t$, $t \in \mathbb{Z}$, kde Y_t, $t \in \mathbb{Z}$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a konečným kladným rozptylem, $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Definujme náhodné veličiny V_t předpisem

$$V_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} X_{t+j}.$$

Spočtěte střední hodnotu a autokovarianční funkci procesu $\{V_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Cvičení 1.6. Uvažujme posloupnost náhodných veličin $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$, kde $Y_t = \cos(tX)$, X je náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0,\pi]$. Spočtěte střední hodnotu a autokovarianční funkci posloupnosti $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Cvičení 1.7. Dokažte podrobněji větu 1.5.

Cvičení 1.8. Nechť R_1, R_2 jsou autokovarianční funkce slabě stacionárních procesů a $a > 0$, $b > 0$. Pak $aR_1 + bR_2$ je opět autokovarianční funkce nějakého slabě stacionárního procesu. Dokažte.

Cvičení 1.9. Nechť $\{X_t,\, t \in T\}$ a $\{Y_t, t \in T\}$, kde $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{Z}$, jsou vzájemně nekorelované slabě stacionární procesy, tj. pro každé $s,t \in T$ jsou X_s, Y_t nekorelované náhodné veličiny. Dokažte, že potom také $\{Z_t, t \in T\}$, kde $Z_t = X_t + Y_t$, je slabě stacionární proces.

Cvičení 1.10. Nechť $\{X_t,\, t \in T\}$, kde $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{Z}$, je gaussovský stacionární proces s nulovou střední hodnotou. Dokažte, že potom také $\{Y_t, t \in T\}$, kde $Y_t = X_t^2$, je (slabě i striktně) stacionární proces se střední hodnotou $R_X(0)$ a autokovarianční funkcí $R_Y(s,t) = 2R_X^2(s-t)$.
Návod: Užijte vztahu pro momenty sdruženého normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou:

$$\mathrm{E}[X_1X_2X_3X_4] = \mathrm{E}[X_1X_2]\mathrm{E}[X_3X_4] + \mathrm{E}[X_1X_3]\mathrm{E}[X_2X_4] + \mathrm{E}[X_1X_4]\mathrm{E}[X_2X_3].$$

Cvičení 1.11. Spočtěte podrobně střední hodnotu a autokovarianční funkci z příkladu 1.2, když počáteční rozdělení Markovova řetězce je stacionární.

Cvičení 1.12. Dokažte, že autokovarianční funkce Poissonova procesu s intenzitou λ je $R(s,t) = \lambda \min(s,t),\ s,t \geq 0$.

Cvičení 1.13. Spočtěte autokovarianční funkci Wienerova procesu a pro $0 \leq t_1 < t_2 \cdots < t_n$ určete varianční matici náhodného vektoru $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})'$.

Cvičení 1.14. *Ornsteinův-Uhlenbeckův proces* $\{U_t, t \geq 0\}$ je transformace Wienerova procesu

$$U_t = e^{-\frac{\alpha t}{2}} W_{\exp\{\alpha t\}}, \qquad \alpha > 0,\ t \geq 0,$$

kde W_τ je veličina Wienerova procesu v čase τ, $W_\tau \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \tau)$. Dokažte, že $\{U_t, t \geq 0\}$ je centrovaný striktně stacionární gaussovský proces s autokovarianční funkcí

$$R(s,t) = \sigma^2 \exp\left\{-\frac{\alpha}{2}|t-s|\right\}.$$

Cvičení 1.15. Rozhodněte, zda funkce

$$R(t) = \exp\left\{\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right\}, \qquad \lambda > 0,\ t \in \mathbb{R},$$

je autokovarianční funkce nějakého náhodného procesu.

Cvičení 1.16. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s nulovou střední hodnotou. Označme $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Potom $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ tvoří martingal, tj. $\mathrm{E}(S_{n+1}|S_1, S_2, \ldots, S_n) = S_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dokažte.

Cvičení 1.17. Nechť $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost martingalových diferencí, tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathrm{E}|X_n| < \infty$ a $\mathrm{E}(X_{n+1}|X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$. Potom X_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou nekorelované náhodné veličiny. Dokažte, že posloupnost $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$, kde $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, tvoří martingal.