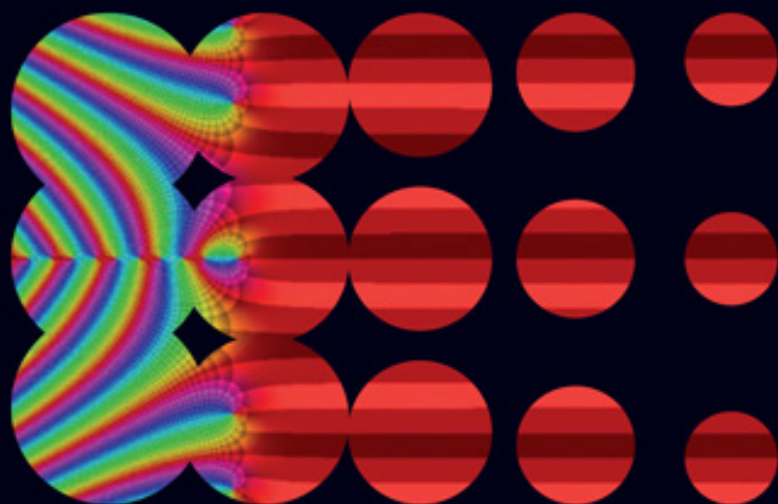


Marcus du Sautoy

# HUDBA PRVOČÍSEL

Dvě století Riemannovy hypotézy



argo / dokořán



Marcus du Sautoy

# **HUDBA PRVOČÍSEL**

**Dvě století Riemannovy hypotézy**

**ARGO / DOKOŘÁN**

Marcus du Sautoy  
**HUDBA PRVOČÍSEL**  
**Dvě století Riemannovy hypotézy**

Copyright © 2003 by Marcus du Sautoy

Translation © Luboš Pick, Mirko Rokyta, 2019

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této publikace nesmí být rozmnožována a rozšiřována jakýmkoli způsobem bez předchozího písemného svolení nakladatele.

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronickě).

Z anglického originálu *The Music of the Primes. Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics* přeložili Luboš Pick a Mirko Rokyta.

Grafická úprava Vladimír Fára, sazba Karel Horák.

Obálka Michal Puhač podle návrhu Pavla Růta.

Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.

Redakce Marie Černá.

Vydalo v roce 2020 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,

Holečkova 9, Praha 5, dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,

jako svou 1036. publikaci (317. elektronická).

ISBN 978-80-7363-976-1

Věnováno památce  
*Yonathana du Sautoye*,  
21. října 2000



# OBSAH

<b>Kapitola 1. Chcete být milionářem?</b>	<b>11</b>
<b>Kapitola 2. Atomy aritmetiky</b>	<b>30</b>
Honba za strukturami	36
Důkaz, pilíř matematiky	40
Eukleidovy báje	47
Na lovu prvočísel	51
Euler, matematický orel	54
Gaussův odhad	59
<b>Kapitola 3. Riemannovo imaginární matematické zrcadlo</b>	<b>72</b>
Komplexní čísla - nová matematická vize	80
Svět za zrcadlem	85
Funkce zeta - dialog mezi hudbou a matematikou	90
Řecká legenda o prvočíslech v novém hávu	94
<b>Kapitola 4. Riemannova hypotéza: od nesourodých prvočísel k ukázněným kořenům</b>	<b>98</b>
Prvočísla a kořeny	103
Hudba prvočísel	108
Riemannova hypotéza - řád vycházející z chaosu	112

<b>Kapitola 5. Matematická štafeta: uvedení</b>	
<b>Riemannovy revoluce do života</b>	<b>117</b>
Hilbert, krysař matematiky	122
Landau, mistr potížistů	132
Hardy, estét matematiky	135
Littlewood, matematický střelec	140
<b>Kapitola 6. Ramanujan, matematický mystik</b>	<b>149</b>
Cambridgeský střet kultur	158
<b>Kapitola 7. Matematický exodus: z Göttingenu do Princetonu</b>	<b>166</b>
Riemann znovu a jinak	168
Selberg, osamělý Viking	175
Erdős, kouzelník z Budapešti	181
Uspořádané kořeny a nahodilá prvočísla	185
Matematická polemika	187
<b>Kapitola 8. Myšlenkové počítače</b>	<b>194</b>
Gödel a omezené možnosti matematiky	197
Turingův zázračný myšlenkový stroj	202
Kladky, táhla a převody	208
Od chaosu a nejistoty k prvočíselné rovnici	214
<b>Kapitola 9. Éra počítačů: od těch myšlenkových až k desktopům</b>	<b>226</b>
Je počítač hrobníkem matematiky?	232
Zagier, matematický mušketýr	236
Odlyzko, mistr výpočtů z New Jersey	242
<b>Kapitola 10. Rozkládání čísel a luštění šifer</b>	<b>247</b>
Zrození internetové kryptografie	248



RSA, trojice z MIT	251
Kryptografický karetní trik	256
Hozená rukavice jménem RSA 129	260
Nová esa v rukávu	262
Pštrosí taktika	265
Na lovu velkých prvočísel	269
Budoucnost je nejen světlá, je i eliptická	271
Svéráz chaldejské poezie	275

## **Kapitola 11. Od uspořádání kořenů ke kvantovému chaosu 281**

Dyson, žabí král fyzikálních věd	289
Kvantové bubny	292
Fascinující rytmus	295
Kouzla matematiky	299
Kvantový biliár	304
42 - odpověď na základní otázku života, vesmíru a vůbec	310
Riemannova závěrečná úklona	316

## **Kapitola 12. Chybějící dílek skládačky 318**

Znalec mnoha jazyků	319
Nová francouzská revoluce	330
O žertu, který vše ukončil	337
Poděkování	348
Literatura	351
Zdroje ilustrací	357
Rejstřík	358



# CHCETE BÝT MILIONÁŘEM?

*„A víme vůbec, co je to za poslounnost? Počkejte, na to snad přijdeme i bez papíru, tak jak to je, ... padesát devět, šedesát jedna, šedesát sedm, sedmdesát jedna... a nejsou to náhodou všechna prvočísla?“ Velínem proběhlo vzrušené zašumění. I Elliina vlastní tvář v nestřežené chvíli prozradila hluboké vzrušení, rychle ale nasadila kamenný výraz, aby nevypadala jako někdo, kdo se snadno nechá unést, což by mohlo působit pošetile a nevědecky.*

Carl Sagan, *Kontakt*

Jednoho dusného srpnového rána roku 1900 naslouchal přeplněný sál pařížské Sorbonny přednášce Davida Hilberta z univerzity v Göttingenu. Konala se zde právě významná akce, slavný Mezinárodní kongres matematiků. Hilbert, pokládáný za jednoho z největších matematiků své doby, si pro tuto příležitost připravil neobvykle odvážnou přednášku. Na rozdíl od jiných nemluvil o svých výsledcích. Místo toho se rozhovořil o tom, co známo není. To bylo proti všem zavedeným zvyklostem a posluchači si nemohli nepovšimnout jisté nervozity v jeho hlase, když předložil svou vizi perspektivy matematiky. „Kdo z nás by nechtěl poodhalit závoj, za kterým se skrývá naše budoucnost, popatřit na další pokroky naší vědy a na její vývoj v nadcházejícím století?“ Hilbert nové století uvítal jako pravý zvěstovatel budoucnosti a svému publiku předložil neslýchanou výzvu sestávající ze seznamu třia dvaceti nevyřešených problémů. Ty podle něj měly nasměrovat matematický výzkum 20. století.

Mnoho problémů z Hilbertova seznamu bylo vyřešeno během následujících desetiletí. Jejich přemožitelé tvoří proslulou skupinu matematiků zvanou „čestná jednotka“. Patří do ní například Kurt Gödel nebo Henri Poincaré a mnoho dalších průkopníků matematiky, jejichž nápady pomohly změnit matematickou krajinu k nepoznání. Jeden z Hilbertových problémů, na seznamu uvedený jako osmý, ovšem hned od začátku sliboval, že by mohl 20. století přežít a nenalézt přitom svého přemožitele. Říká se mu „Riemannova hypotéza“.

## 1. CHCETE BÝT MILIONÁŘEM?

Z výzev, které Hilbert matematikům předložil, zastávala ta osmá v jeho srdci výsadní místo. Existuje stará německá báje vyprávějící o Friedrichu Barbarosovi. Tento lidem milovaný německý císař zahynul během třetí křížové výpravy. Legenda ovšem praví, že Barbarossa je stále živ a pouze upadl do spánku kdesi v jeskyni v Kyffhäuserských horách. Probudí se tehdy, až jej bude jeho Německo zase potřebovat. Říká se, že se kdosi Hilberta zeptal: „Kdybyste měl podobně jako Barbarossa obžít po pěti letech, co byste dělal?“ Hilbert odpověděl: „Zeptal bych se, jestli už někdo dokázal Riemannovu hypotézu.“

Jak se tak 20. století chýlilo ke konci, většina matematiků se pomalu smiřovala s tím, že tento klenot mezi Hilbertovými problémy nejen pravděpodobně přežije století, ale nejspíš opravdu zůstane nevyřešen ještě i po dalších čtyři sta let, než se Hilbert probudí. Hilbert úspěšně šokoval účastníky prvního matematického kongresu 20. století přednáškou o tom, co nevíme. Na účastníky posledního kongresu století ale také čekalo překvapení.

Dne 7. dubna 1997 se na počítačových obrazovkách po celém matematickém světě rozzářila velmi neobvyklá zpráva. Na webové stránce nadcházejícího kongresu matematiků, který se měl konat následujícího roku v Berlíně, se objevilo oznámení, že svatý grál matematiky byl nalezen. Riemannova hypotéza byla dokázána. Následky takové zprávy by byly vskutku nedozírné. Riemannova hypotéza je ústředním problémem veškeré matematiky. Když si matematici četli toho dne elektronickou poštu, zažili mimořádné vzrušení při představě, že se možná dožili vyřešení jedné z největších matematických záhad všech dob.

Oznámení přišlo od Enrica Bombieriho. Těžko nalézt lepší a důvěryhodnější zdroj. Bombieri patřil po celou dobu ke stěžejním opatrovníkům Riemannovy hypotézy, a navíc byl profesorem v nesmírně prestižním Ústavu pokročilých studií v Princetonu, kde kdysi pracovali Einstein a Gödel. Většinou toho moc nenamluvil, nicméně matematici vždy velmi pečlivě naslouchali tomu, co říká.

Bombieri se narodil v Itálii, kde díky prosperujícím rodinným vinohradům získal všeobecně znamenitý vkus a cit pro to, co je v životě dobré. Kolegové jej láskyplně nazývají „matematickým aristokratem“. Během svého mládí patřil k nejstylovějším účastníkům evropských konferencí. Občas se objevil v nějakém parádním sportáku. Sám velmi ochotně živil historky o tom, že kdysi skončil šestý v jistém čtyřadvacetihodinovém italském automobilovém závodě. Jeho úspěchy na poli matematiky byly ovšem hmatatelnější a vedly

k tomu, že byl v roce 1970 pozván do Princetonu. Tam již od té doby zůstal. Svou vášeň pro rallye později vyměnil za malování, zejména portrétů.

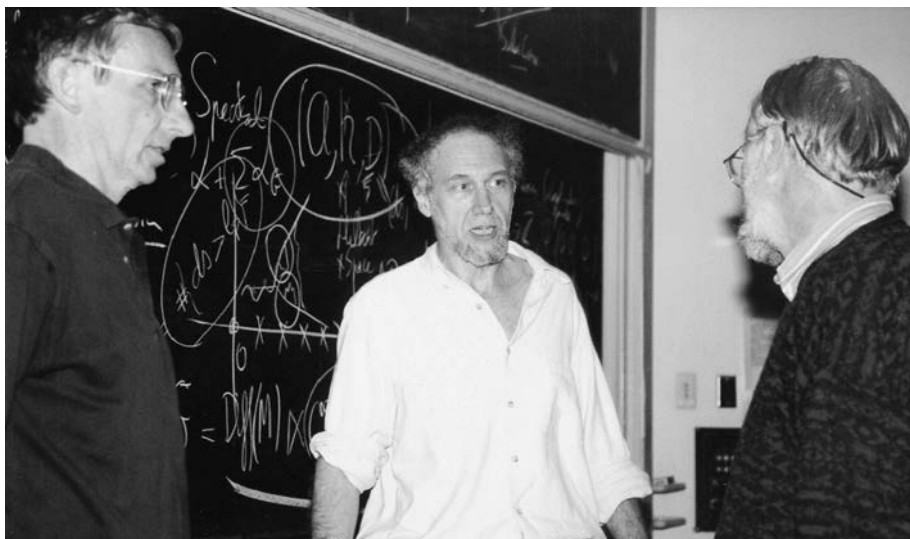
Jeho hlavní oblastí zájmu je ale matematická umělecká tvořivost, a hlavně výzva skrývající se v Riemannově hypotéze. Riemannovou hypotézou byl Bombieri posedlý od svých patnácti let, kdy si o ní jakožto předčasně vyspělý mladík poprvé něco přečetl. Vlastnosti čísel jej fascinovaly odjakživa, už jako malý si o nich četl v matematických knihách, kterých jeho otec ekonom vlastnil úctyhodnou sbírku. Zjistil, že Riemannova hypotéza je považována za nejhlubší a nejdůležitější problém teorie čísel. Mladíkova vášeň pro problém ještě vzrostla, když mu za jeho případné vyřešení otec přislíbil Ferrari, což byl zoufalý pokus přimět syna, aby přestal huntovat jeho vlastní model.

Podle e-mailu se zdálo, že se Bombieri vytoužené odměny nedočká. „Přednášky Alaina Connese v Princetonu nabraly minulý týden fantastický směr,“ začal Bombieri svůj e-mail. Sedm let předtím rozrušila matematický svět zvěst, že Alain Connes obrátil svou pozornost k pokusu o zdolání Riemannovy hypotézy. Connes patřil k revolucionářům oboru. Je-li Bombieri Ludvíkem šestnáctým, pak Connes je bezesporu Robespierrem této oblasti matematiky. Je to kromobyčejně charismatický člověk, jehož výbušný styl se ani v nejmenším nepřibližuje zřítelé představě matematika coby jakéhosi neobratného suchara. Má zápal fanatika přesvědčeného o své vizi světa a jeho přednášky mají hypnotický účinek. Pro své následovníky je postavou téměř kultovních rozměrů. A ti jej půjdou velice ochotně bránit na barikády proti jakémukoli protiútoky starých struktur reprezentujících nějaký ten *ancien régime*.

Connes je zaměstnán v Institut des hautes études scientifiques v Paříži, což je jakási francouzská obdoba Princetonu. Hned od svého příchodu do této instituce v roce 1979 vytvořil zcela nový jazyk pro popis své vlastní novátorské vize geometrie. Je to matematik, který se nebojí dotáhnout předmět svého výzkumu až do té nejextrémnější formy abstrakce. Dokonce i většina matematiků uvyklých hluboce koncepčním přístupům jejich vlastního předmětu studia ke světu trochu ucukla před abstraktní revolucí, kterou Connes razil. Těm, kdo tvrdili, že tak drsné teorie není zapotřebí, nicméně ukázal, že jeho nový geometrický jazyk zahrnuje mnoho vodítek ke světu kvantové fyziky. Jestliže věc způsobí masové zděšení mezi matematiky, pak nechť se tak stane.

Connesova troufalá víra, že by jeho nová geometrie mohla poodhalit nejen roušku světa kvantové fyziky, ale dokonce snad i vysvětlit Riemannovu hypotézu, tedy největší číselnou záhadu všech dob, se setkala s překvapením,

## 1. CHCETE BÝT MILIONÁŘEM?



**Obr. 1:** Alain Connes, profesor v Institut des hautes études scientifiques a na Collège de France.

a dokonce šokem. To, že si dovolil proniknout do hájemství teorie čísel a utkat se zde tváří v tvář s nejtěžším problémem matematiky, odráželo pro něj zcela typické ignorování veškerých myslitelných hranic. Hned od jeho příchodu na scénu v polovině 90. let 20. století panoval obecný názor, že jestli má někdo na to, aby tuto notoricky známou baštu dobyl, pak je to právě Alain Connes.

Ale tím, kdo měl najít poslední chybějící kousek mozaiky, nebyl Connes. Bombieri pokračoval, že jistý mladý fyzik sedící v obecnstvu na Connesově přednášce dostal zčistajasna nápad, jak využít svůj bizarní svět supersymetrických fermionicko-bosonických systémů ke zdolání Riemannovy hypotézy. Většina matematiků neměla tušení, co tato směsice nesmyslných výrazů znamená. Bombieri proto připojil vysvětlení, že tato slůvka popisují „fyziku týkající se skupiny částic zvaných anyony a morony s opačnými spiny za teploty blízké absolutní nule“. To pořád ještě znělo dost šíleně, na druhé straně ale mělo jít o popis řešení nejtěžšího problému historie matematiky, takže málokdo by mohl očekávat jednoduchý výklad. Podle Bombieriho zmíněný mladý fyzik po šesti dnech nepřetržité usilovné práce s pomocí nového programovacího jazyka MISPAN nakonec nejtěžší matematický problém vyřešil.

Bombieri zakončil svůj e-mail zvoláním: „To je bomba! Prosím, šiřte tuto zprávu nejvíce, jak to půjde.“ Přestože to znělo zvláštně, že by měl zrovna nějaký mladý fyzik dokázat Riemannovu hypotézu, nebylo to zcela nemyslitelné. Během několika posledních desetiletí byla velká část matematiky hluboce provázána s fyzikou. Riemannova hypotéza je sice probléem z teorie čísel, během posledních let ale několikrát vyluly na povrch jeho nečekané souvislosti s probléem částicové fyziky.

Mnozí matematici změnili své původně zamýšlené cestovní plány a místo toho vytáhli do Princetonu, aby byli u toho. Vzpomínka na vzrušení, které zavládlo před pár lety, když v červnu 1993 britský matematik Andrew Wiles během své přednášky v Cambridgi oznámil, že dokázal velkou Fermatovu větu, byla ještě čerstvá. Wiles prokázal, že se Fermat nemýlil, když tvrdil, že rovnice  $x^n + y^n = z^n$  nemá celočíselná řešení, jestliže je číslo  $n$  větší než 2. Když na konci přednášky Wiles položil křidu, začaly létat zátky od šampaňského a fotoaparáty začaly blýskat.

Matematici ovšem dobře věděli, že případný důkaz Riemannovy hypotézy by měl pro budoucnost matematiky podstatně větší význam než potvrzení toho, že Fermatova rovnice nemá řešení. Jak Bombieri zjistil již v útlém věku patnácti let, Riemannova hypotéza míří k porozumění nejzákladnějším prvkům matematiky, tedy prvočísům.

Prvočísla jsou jakýmisi atomy aritmetiky. Jsou to ta čísla, která nelze zapsat ve formě součinu dvou menších čísel. Čísla 13 nebo 17 jsou prvočísla, zatímco 15 nikoli, neboť je lze zapsat ve formě součinu  $3 \times 5$ . Prvočísla jsou klenoty rozeseté po nekonečném číselném vesmíru a matematici je vzývají po staletí. Pro matematiky představují něco jako div světa: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... - čísla pokračující bez konce, která existují kdesi v nějakém zvláštním světě mimo naši fyzickou realitu. Jsou cosi jako dar matky Přírody matematikům.

Jejich význam pro matematiku vyvěrá z toho, že jsou to stavební kameny, s jejichž pomocí je možné zkonstruovat všechna ostatní celá čísla. Každé číslo, které není prvočíslem, je možné získat pomocí vynásobení vhodných prvočíselných kamenů. Každou molekulu ve fyzickém světě je možné sestavit z atomů prvků periodické tabulky chemických prvků. Seznam prvočísel je takovou tabulkou pro matematiku. Prvočísla 2, 3 a 5 představují vodík, helium a lithium v matematikově laboratoři. Když matematik zvládne tyto základní kameny, dává mu to naději, že jednou objeví nové způsoby, jak vytyčit cestu skrz neprostupnou džungli matematického světa.

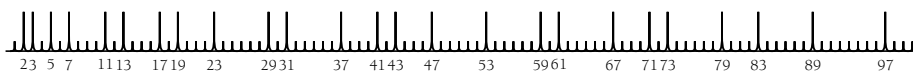
## 1. CHCETE BÝT MILIONÁŘEM?

Navzdory jejich zdánlivé jednoduchosti a fundamentálnímu charakteru si prvočísla zároveň drží prestižní místo nejzáhadnějších objektů, jakými se kdy nějaký matematik zabýval. V matematice, tedy předmětu zasvěceném hledání řádu a schématům, představují prvočísla nejzákladnější výzvu. Letmý pohled na jejich seznam ukazuje, že je nemožné předpovědět, kdy se objeví to následující. Jejich výskyt se zdá být zcela náhodný a chaotický a nenabízí žádná vodítka, jak určit příští prvočíslo. Seznam prvočísel je tepem matematiky, jeho pulz je však řízen vpravdě silným kofeinovým koktejlem (obrázek 2).

Dokážeme nalézt nějaký magický vzorec nebo předpis, jenž by generoval čísla na tomto seznamu, nějaké kouzelné pravidlo, které by nám ukázalo, kde se nachází sté prvočíslo? Tato otázka posedla mysl matematiků všech věků. Navzdory námaze vynakládané nepřetržitě po více než dva tisíce let se zdá, že prvočísla stále vzdorují všem pokusům o zařazení do nějaké jasně definované struktury. Generace matematiků seděly a naslouchaly prvočíselnému bubínku, jenž vytleskával posloupnosti čísel: dva údery, pak tři, pět, sedm, jedenáct. Nasloucháme rytmu a stále více jsme přesvědčeni o tom, že se v jeho pozadí nenachází žádná vnitřní logika, jen jakýsi náhodný bílý šum. V samém srdci matematiky, předmětu zasvěceného hledání řádu, neslyší matematici nic jiného než chaotický hluk.

Matematici se ovšem nehodlají smířit s tím, že by se pro tento jev nenašlo nějaké vysvětlení. Prvočísla si vyvolila sama příroda. Kdyby v matematice neexistovala nějaká struktura, nějaké nádherné jednoduché schéma, pak by ji vůbec nestálo za to studovat. Naslouchání bílému šumu lze jen stěží považovat za obzvláště úžasnou zábavu. Matematik Henri Poincaré napsal: „Vědci nestudují přírodu proto, že je užitečná. Studují ji proto, že v ní shledávají potěšení. A potěšení v ní shledávají proto, že je nádherná. Kdyby příroda nebyla nádherná, nestála by za to, abychom ji poznávali. A kdyby příroda nestála za poznání, život by nestál za to, abychom jej žili.“

Člověk by si mohl myslet, že se prvočíselný tep po nervózním začátku po nějaké době usadí. Avšak není tomu tak. Naopak, zdá se, že jak počítáme dál a dál, věci se zhoršují. Podívejme se na seznam prvočísel obsažených ve stov-



Obr. 2: Prvočísla v první stovce čísel – nepravidelný tep matematiky.



ce po sobě jdoucích přirozených čísel vlevo a vpravo od čísla 10 000 000. Nejprve vlevo, tedy pod hodnotou 10 000 000:

9 999 901, 9 999 907, 9 999 929, 9 999 931, 9 999 937,  
9 999 943, 9 999 971, 9 999 973, 9 999 991.

Ve stovce ležící vpravo od hodnoty 10 000 000 však najdeme pouze dvě:

10 000 019, 10 000 079.

Je opravdu těžké uhodnout vzorec, který by takové chování řídil. Uvedené procesí prvočísel mnohem více připomíná náhodný výběr než nějakou ukázněnou strukturu. Podobně jako nám znalost výsledků 99 hodů mincí nikterak nepomůže uhodnout, jak dopadne stý hod. Úplně stejně zdánlivě vzdorují jakémukoli předvídaní i prvočísla.

Prvočísla představují pro matematiky stálý zdroj stresu a napětí, a to jeden z nejpozoruhodnějších svého druhu. Na jedné straně je jasné, že každé číslo je buď prvočíslem, nebo není. Pokud je číslo prvočíslem, žádným kouzlem nelze způsobit, aby se náhle stalo dělitelným nějakým menším číslem. Na druhé straně ale nelze popřít, že seznam prvočísel vypadá jako zcela náhodně vybraná posloupnost. Fyzikové se smířili s faktem, že o osudu vesmíru rozhoduje hod kvantovou kostkou, která při každém vrhu náhodně určí, kde mají vědci hledat hmotu. Ovšem představa, že nejzákladnější posloupnost čísel, na níž je postavena veškerá matematika, určuje příroda nějakým náhodným házením mincí, přece jen vzbuzuje jisté rozpaky. Náhoda a chaos jsou u matematiků v klatbě.

Navzdory svému náhodnému výskytu ale prvočísla vykazují jistou nadčasovost a univerzálnost, a to více než jakýkoli jiný objekt potulující se po matematické krajině. Prvočísla by zde byla bez ohledu na úroveň našeho vývoje, tedy i tehdy, kdybychom je nebyli schopni rozpoznat. Jak napsal cambridgeský matematik G. H. Hardy ve své knize *Obrana matematická*, „číslo 317 je prvočíslem nikoli proto, že si to myslíme, nebo snad proto, že naše mysl pracuje tím či oním způsobem, nýbrž proto, že tomu tak je, prostě proto, že taková je matematická realita“.

Někteří filozofové by se nad tímto platónským přístupem ke světu asi zamysleli a možná by bezmeznou víru v existenci nějaké reality mimo existenci lidskou i rozporovali, podle mne z nich ale právě tento fakt dělá filozofy, a nikoli matematiky. Existuje záznam fascinujícího dialogu mezi Alainem Connesem, tedy matematikem, o němž se zmiňuje Bombierho

## 1. CHCETE BÝT MILIONÁŘEM?

zpráva, a neurologem Jeanem-Pierrem Changeuxem v knize *Rozhovory o mysli, hmotě a matematice*. Napětí je v této knize přímo hmatatelné. Matematik hájí existenci matematiky mimo naši mysl, zatímco neurolog je pevně odhodlán jakoukoli podobnou ideu popřít. „Jak to tedy, že nevidíme zlatým písmem vyvedený nápis ‚ $\pi = 3,14159\dots$ ‘ na obloze? Proč se neobjevuje výraz  $6,02 \times 10^{23}$  v odrazu křišťálové koule?“ Changeux vyjadřuje svou nezměrnou frustraci, když Connes trvá na svém, že „existuje, a to nezávisle na lidské mysli, ryzí a neměnná matematická realita“ a že někde v srdci tohoto světa leží pevně daný soupis prvočísel. Matematika, praví Connes, „je bezesporu jediným vpravdě *univerzálním* jazykem“. Na druhé straně vesmíru si lze snadno představit nějakou jinou chemii nebo biologii, ale prvočísla zůstanou prvočísky bez ohledu na to, ve které galaxii počítáme.

V klasickém románu *Kontakt* od Carla Sagana využívají mimozemšťané prvočísel jako technického prostředku k navázání kontaktu s živými bytostmi na Zemi. Hlavní hrdinka Ellie Arrowayová pracuje pro Organizaci pro vyhledávání mimozemských inteligentních tvorů a naslouchá přitom praskavým zvukům přicházejícím z vesmíru. Jedné noci, když jsou teleskopy zrovna namířeny směrem ke hvězdě Vega v souhvězdí Lyry, se na pozadí obvyklého šumu náhle ozve podivný tepající zvuk. Ellie okamžitě rozpozná, o jaký rytmus se jedná. Ozvou se dva údery, pak tři, pět, sedm, jedenáct a tak dále, přes všechna prvočísla až do 907. Pak vše začne nanovo.

Kosmický buben vyklepává hudbu, kterou pozemšťané nemohou nepoznat. Ellie je přesvědčena, že takový rytmus musela vyvolat nějaká inteligentní kultura. „Je těžké si představit, že by nějaká radioaktivní plazma vysílala tak pravidelné matematické signály. Prvočísla byla zvolena proto, aby upoutala naši pozornost.“ Kdyby mimozemská civilizace vysílala například posloupnost čísel vyhrávajících v nějaké mimozemské loterii, Ellie by je od šumu v pozadí nerozpoznala. Přestože soupis prvočísel působí skoro stejně náhodným dojmem jako čísla tažená v loterii, jejich charakter přesně určuje výběr každé jednotlivé položky v tomto mimozemském vysílání. A právě díky neměnnosti této struktury Ellie pozná, že mimo Zemi existuje také život.

Komunikace pomocí prvočísel ale není jen science fiction. Oliver Sacks ve své knize *Muž, který si pletl manželku s kloboukem* píše o šestadvacetiletých dvojčatech Johnovi a Michaelovi, jejichž nejintimnější konverzace se odehrávala na bázi šestimístných prvočísel. Sacks píše o tom, jak je poprvé nacytal, když si v rohu místnosti tajně sdělovali prvočísla: „Na první pohled vypadali jako nějakí znalci vína při ochutnávce nějakého hodně vzácného druhu, kteří

si sdělují dojmy a všelijaká sofistikovaná hodnocení.“ Sacks dlouho nemohl přijít na to, o co dvojčatům vlastně jde. Jakmile ale prolomil jejich tajný kód, naučil se z paměti nějaká osmimístná prvočísla a začal je kradmo vkládat do konverzace hned při příštím setkání. Dvojčata byla nejprve překvapena, pak překvapení přešlo v hluboké soustředění, a nakonec v jásot nad tím, že našla nové prvočísla. Sacks si k hledání svých prvočísel vzal na pomoc prvočíselné tabulky, ale jak hledala svá prvočísla dvojčata, je naprostá záhada. Mohli snad tito autističtí učenci vlastnit nějakou tajnou formuli, která unikala generacím matematiků?

Příběh těchto dvojčat má Bombieri v obzvláštní oblibě.

Když slyším tenhle příběh, nemohu se ubránit obrovské pokoře a úžasu nad tím, jak pracuje lidský mozek. Ale rád bych věděl, jestli mají moji matematictí přátelé stejné pocity. Vidí snad také, jak bizarním, jak zázračným, ba dokonce snad mimo tento svět ležícím nevídaným talentem tato dvojčata tak přirozeně disponují? Jsou si vědomi toho, že se matematici po staletí usilovně snaží nalézt způsob, jak provádět to, co John a Michael dělají naprosto spontánně - tedy generovat a rozpoznávat prvočísla?

Dříve než mohl někdo přijít na to, jak to dělají, byla od sebe dvojčata oddělena ve věku třiceti sedmi let. Nařídili to jejich ošetřující lékaři, kteří došli k závěru, že jim jejich tajná numerologická řeč brání ve vývinu. Kdyby ti samí lékaři vyslechli některou z konverzací, jaké často slyšíme ve společenských místnostech kateder matematiky na světových univerzitách, asi by účastníky těchto diskusí nechali též internovat.

Dvojčata pravděpodobně používala k testování prvočíselnosti trik založený na takzvané malé Fermatově větě. Tento trik je podobný způsobu, jakým autističtí učenci rychle identifikují, že například třináctý duben roku 1922 bylo úterý, což je úkon, jenž bývá často předváděn v televizních pořadech. Oba triky jsou založeny na takzvané modulární neboli hodinové aritmetice. Ale i kdyby neměli žádnou zázračnou formuli pro generování prvočísel, i tak byla jejich dovednost naprosto mimořádná. Před svým odloučením se dostali až ke dvacetimístným číslům, hodně daleko za hranice Sacksových prvočíselných tabulek.

Podobně jako Saganova hrdinka naslouchající kosmickému prvočíselnému tepu nebo Sacks slídící za prvočíselně se domlouvajícími dvojčaty se také matematici po staletí namáhají, aby zaslechli v tomto šumu nějaký řád. Podobně jako když nasloucháme východní hudbě západním sluchem a nic z toho, co slyšíme, nedává smysl. Pak ale přišlo 19. století a nastal zásadní

## 1. CHCETE BÝT MILIONÁŘEM?

zlom. Bernhard Riemann se na problém podíval z úplně jiného úhlu. Ze své nové perspektivy začal náhle pozvolna odhalovat obrysy jisté struktury, která by mohla být odpovědná za prvočíselný chaos. V pozadí za povrchním šumem prvočísel se objevila nečekaná prchavá harmonie. Ač to byl obrovský krok kupředu, nová hudba i tak stále ukrývala mnohá svá tajemství mimo dosah lidského ucha. Riemann, jakýsi Wagner matematiky, se ovšem nehodlal nechat zdolat. O záhadné hudbě, kterou objevil, pronesl neslýchaně odvážné prorocství. Tato předpověď pak vešla ve známost jako takzvaná Riemannova hypotéza. Ten, kdo prokáže, že Riemannova intuice týkající se podstaty této hudby byla správná, zároveň nalezne vysvětlení toho, že se prvočísla vyznačují tak přesvědčivou zdánlivou nahodilostí.

Riemannův vhled do problému byl důsledkem jeho objevu jistého matematického zrcadla, skrz které na prvočísla nahlížel. Alenčin svět se změnil k nepoznání, když prolezla zrcadlem. Zato v podivuhodném světě za Riemannovým zrcadlem se zdálo, že se chaos kolem prvočísel přeměnil ve strukturu s nejlepším možným uspořádáním. Riemann vyslovil domněnku, že tento řád bude pokračovat neustále bez ohledu na to, jak daleko do nekonečného prostoru za zrcadlem se vydáme. Kdyby mu jeho předpověď vnitřní harmonie vzdálenější strany od zrcadla vyšla, přinesla by konečně vysvětlení toho, proč se chování prvočísel jeví navenek tak chaotické. Proměnu způsobenou Riemannovým zrcadlem, které mění chaos v řád, považuje většina matematiků za bezmála zázračnou. Riemann zanechal matematickému světu výzvu spočívající v ověření toho, že řád, který domněle objevil, tam skutečně je.

Bombierioho e-mail ze 7. dubna 1997 sliboval začátek nové éry. Možná, že nakonec Riemannova vize nebyla jen preludem. Aristokrat matematiky nabídl kolegům úžasnou šanci na objasnění zdánlivého chaosu v chování prvočísel. Matematici by se neprodleně a s nadšením mohli dát do vykopávání mnoha dalších pokladů, k jejichž nalezení jim stačí pouze jeden krůček – vyřešení Riemannova velkého problému.

Případné vyřešení Riemannovy hypotézy by mělo nedozírné následky pro osudy mnoha dalších matematických otázek. Prvočísla jsou natolik stěžejní pro každého profesionálního matematika, že jakýkoli průlom v porozumění jejich podstatě by měl vskutku masivní účinek. Riemannově hypotéze se, jak se zdá, nelze vyhnout. Jak se tak matematici pohybují po záhybech matematické krajiny, vypadá to, že každá z cestiček nutně vede kolem alespoň jednoho místa, jež skýtá nějaký velkolepý výhled na Riemannovu hypotézu.