HYNEK CÍGLER

# Matematické schopnosti

## Teoretický přehled a jejich měření

edice EDIS
MASARYKOVA UNIVERZITA

EDIS
Ediční řada disertačních prací
Fakulty sociálních studií Masarykovy univerzity

Svazek 19

muni
PRESS

# MATEMATICKÉ SCHOPNOSTI

## Teoretický přehled a jejich měření

Hynek Cígler

Masarykova univerzita
Brno 2018

*Publikace byla vydána s finanční podporou Fakulty sociálních studií MU jako součást edice EDIS. Cílem edice je podpora publikačních aktivit badatelů, kteří získali titul Ph.D.*

Recenzovali:
PhDr. Martin Jelínek, Ph.D. Psychologický ústav (Filozofická fakulta MU)
prof. PhDr. Jiří Kožený, CSc. (Národní ústav duševního zdraví, 3. lékařská fakulta UK)



ISBN 978-80-210-9010-1
ISBN 978-80-210-9009-5 (brož. vaz)

# PODĚKOVÁNÍ

*Poděkování: Janě za trpělivost po bezesných nocích strávených prací na dizertaci, ze které tato kniha vznikla. Tomáši Urbánkovi za pečlivou supervizi tohoto elaborátu a vedení během mého doktorského studia. V neposlední řadě pak mým kolegům, kteří mě naučili mnoho věcí, které jsem při přípravě textu využil – jmenovitě zejména Standovi Ježkovi, Honzovi Širůčkovi a Michalu Jabůrkovi. A samozřejmě i všem ostatním, kteří se do i tak už dost roztahaného poděkování prostě nevejdou.*

# OBSAH

PŘEDMLUVA AUTORA . . . . . 11

ÚVOD . . . . . 13
Matematické schopnosti nebo dovednosti? . . . . . 15
Shrnutí přístupů ke studiu matematických schopností . . . . . 19

PSYCHOMETRICKY-FAKTOROVÝ PŘÍSTUP KE STUDIU MATEMATICKÝCH SCHOPNOSTÍ . . . . . 21
Potíže se specifikací modelu . . . . . 22
CHC teorie a stručná historie faktorového studia výkonových testů . . . . . 24
Zařazení matematických schopností v rámci CHC . . . . . 27

KOGNITIVNĚ-INFORMAČNÍ PŘÍSTUP KE STUDIU MATEMATICKÝCH SCHOPNOSTÍ . . . . . 34
Kognitivní procesy vedoucí ke správnému řešení . . . . . 35
Hypotéza konzistentního jazyka . . . . . 38
Typické kognitivní chyby při zpracování informace . . . . . 40
Klasifikace „racionálních“ chyb: REASON model . . . . . 42

KOGNITIVNĚ-KULTURNÍ PŘÍSTUP KE STUDIU MATEMATICKÝCH SCHOPNOSTÍ . . . . . 44
Piagetovský konstruktivismus v matematice . . . . . 45
Senzomotorické stadium . . . . . 48
  Preoperační stadium (cca 2–7 let) . . . . . 49
  Stadium konkrétních operací (cca 7–11 let) . . . . . 50
  Stadium formálních operací (od cca 11 let) . . . . . 50

Neonativistický přístup. Vývoj představy čísla a aritmetických dovedností . . . . . 51

Vývoj prearitmetických a preverbálních matematických schopností: kardinalita, ordinalita . . . . . 52

Vývoj enumerativních a aritmetických schopností . . . . . 60

Shrnutí kognitivně-kulturního přístupu ke studiu matematických schopností . . . . . 71

KOGNITIVNĚ-VZDĚLÁVACÍ PŘÍSTUP KE STUDIU MATEMATICKÝCH SCHOPNOSTÍ . . . . . 74

Kontext pro hodnocení míry porozumění matematickému problému . . . . . 74

Dynamické testování matematických schopností . . . . . 76

Rozdíly v matematickém výkonu a schopnostech na základě motivace a pohlaví . . . . . 76

VYSOCE NADPRŮMĚRNÉ VS. VYSOCE PODPRŮMĚRNÉ MATEMATICKÉ SCHOPNOSTI . . . . . 80

Specifické poruchy učení v matematice . . . . . 80

Typické symptomy dětí se specifickou poruchou učení v matematice . . . . . 85

Enumerace . . . . . 85

Relace a základní operační vztahy . . . . . 85

Základní aritmetické operace . . . . . 86

Pracovní paměť . . . . . 87

Etiologie a prevalence dyskalkulie . . . . . 88

Mimořádné matematické nadání . . . . . 90

Kognitivní nadání jako předčasná vyspělost . . . . . 91

Kognitivní nadání jako soubor specifických schopností . . . . . 92

Matematické nadání: shrnutí . . . . . 93

TESTY POUŽÍVANÉ K MĚŘENÍ MATEMATICKÝCH SCHOPNOSTÍ A DOVEDNOSTÍ V ČR . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 95
Test pro identifikaci nadaných žáků v matematice u žáků 3.–5. třídy (TIM$^{3-5}$) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 96
Diagnostika struktury matematických schopností (DISMAS) . . . . . . 96
Posuzovací škály a didaktické testy k vyhledávání nadaných žáků (baterie IDENA) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 97
Neuropsychologická batéria testov na spracovávanie čísiel a počítanie u detí (ZAREKI) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 98
Percepčně numerický test, barevná kalkulie a kalkulie IV . . . . . . . . . . 98
Matematické předpoklady dětí v mladším školním věku, Vyšetření matematických schopností u dětí . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
Diagnostika matematických schopností a dovedností . . . . . . . . . . . . 100
Další testy . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 100

SHRNUTÍ ÚVODU A VÝZKUMNÉ CÍLE PRÁCE . . . . . . . . . . . 101
Dimenzionalita škál testů matematických schopností . . . . . . . . . . . 103
Možnosti Raschova modelu při vývoji matematických testů . . . . . 104

STUDIE 1: DIMENZIONALITA MATEMATICKÝCH TESTŮ . . 106
Metoda . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 108
  Výzkumný vzorek a použité metody . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 108
  Statistická analýza dat . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 108
    Paralelní analýza (PA) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110
    MAP, VSS, BIC . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112
Výsledky . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112
  TIM$^{3-5}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112
  DISMAS . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 117
    Součtové skóry, srovnání dětí podle výkonu i populace . . . . 117
    Subtesty, srovnání podle populace . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 120
    Subtesty, srovnání podle výkonu . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123
Diskuze ke studii 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 125
  Limity . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 127
  Závěr . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 128

STUDIE 2: RASCHŮV MODEL . . . . . . . . . . 129

Polytomní Raschovy modely . . . . . . . . . . 131

Ilustrace využití obtížností a prahů položek. . . . . . . . . . 133

Informační funkce položky a testu . . . . . . . . . . 137

Ilustrace využití informací o informační funkci a chybě měření . . . . . . . . . . 141

Odhad reliability v rámci IRT . . . . . . . . . . 142

Ilustrace využití odhadů reliability při konstrukci a ověřování testu . . . . . . . . . . 145

Shoda dat s modelem . . . . . . . . . . 147

Na úrovni modelu. . . . . . . . . . . 147

Na úrovni položek a respondentů . . . . . . . . . . 149

DIF analýza . . . . . . . . . . 151

Ilustrace využití DIF analýzy . . . . . . . . . . 154

Skóry založené na Raschově modelu . . . . . . . . . . 156

Ilustrace využití skórů založených na IRT . . . . . . . . . . 160

DOSLOV . . . . . . . . . . 162

LITERATURA. . . . . . . . . . 164

PŘÍLOHY. . . . . . . . . . 187

Příloha 1: Intervaly spolehlivosti vlastních hodnot . . . . . . . . . . 187

Příloha 2: Paralelní analýza testu DISMAS (dle vzorku) . . . . . . . . . . 187

Příloha 3: Podrobné výsledky ostatních analýz počtu faktorů (DISMAS, dle vzorku) . . . . . . . . . . 191

Příloha 4: Paralelní analýza testu DISMAS (dle výkonu) . . . . . . . . . . 192

Příloha 5: Podrobné výsledky ostatních analýz počtu faktorů (DISMAS, dle výkonu) . . . . . . . . . . 195

SUMMARY . . . . . . . . . . 197

# PŘEDMLUVA AUTORA

Držíte v rukou knihu, která vznikala v průběhu dvou velmi krušných období. První z nich byla druhá polovina roku 2016, kdy jsem po nocích usilovně dokončoval svou dizertační práci. Zřejmě mi to nestačilo, a proto jsem se rozhodl text přetavit do knižní podoby – trvalo více než rok, než jsem se odhodlal začít, a toto pokračování mělo na svědomí další šediny na mé hlavě a rovněž zdržení jiných projektů, které měly být dávno dokončeny. Nicméně je podle všeho hotovo.

Původním cílem mé dizertační práce bylo prozkoumat možnosti měření matematických schopností a dovedností. Po obsáhlém teoretickém úvodu a elaboraci vybraných pasáží Raschova modelu proto následovaly tři výzkumné studie. Dvě z nich však byly k dnešnímu dni publikovány ať už knižně (v jiné verzi, obsah je však dosti podobný) nebo časopisecky (v tomto případě v prakticky identické podobě), nemá tedy smysl je zde uvádět potřetí.

Zaměřil jsem se proto na zbytek práce, mírně změnil její strukturu a zejména ji jazykově upravil – pokusil jsem se doplnit četná vysvětlení, zjednodušit tok textu a celkově vše zpřehlednit. Zda se mi to podařilo, nedovedu dost dobře posoudit. I přes zmíněné úpravy však naprostá většina obsahu vychází z dizertační práce a je zpravidla přebírána doslovně bez dalších citací.

Cílem této knihy je v první řadě seznámit vás s psychologickým pohledem na matematické schopnosti – ať už s jejich vztahem k jiným kognitivním, zejména intelektovým charakteristikám, tak i s jejich „kognitivními prerekvizitami“, tedy psychickými funkcemi zodpovědnými například za vjem množství, včetně způsobu jejich vývoje v dětství. Právě tyto funkce, spolu s antropologickým výzkumem matematických schopností, považuji za velmi zajímavé, což je zřejmě patrné z většího prostoru, který jsem jim věnoval. Zmiňuji ale i další vybraná témata: například typické příčiny a souvislosti chybných nebo naopak správných řešení matematických problémů, rozdíly v matematických schopnostech podle pohlaví, specifika osob s dyskalkulií či naopak matematickým nadáním. V neposlední řadě jsem pak sestavil (jak doufám) vyčerpávající přehled všech významnějších a používaných matematických testů dostupných v České republice k dnešnímu datu.

Myslím, že tento teoretický přehled je přímo možné použít jako studijní materiál a díky poměrně bohatému poznámkovému aparátu rovněž jako „rozcestník“ k dalším výzkumům. Kromě toho lze z prezentovaných informací vycházet při konstrukci nových testů matematických schopností a dovedností. Tento postup jsem ostatně zvolil s kolegy Michalem Jabůrkem a Jiřinou Bednářovou, když jsme začínali pracovat na pilotní verzi naší zcela nové baterie testů matematického výkonu. Zatím se zdá, že se osvědčil.

Na tento přehled pak navazuje jedna výzkumná studie, testující dílčí hypotézu týkající se kognitivních prerekvizit, které by měly způsobovat rozdíly v pozorované faktorové struktuře mezi dětmi s vyššími a nižšími matematickými dovednostmi. Tato hypotéza se nepotvrdila, ale nebylo ji možné ani spolehlivě zamítnout – důsledky pro další praxi a diagnostiku dyskalkulie jsou podrobně diskutovány.

Poslední kapitolu snad ocení psychometricky orientovaní kolegové. Týká se vybraných aspektů Raschova modelu se zaměřením na konkrétní praxi při tvorbě (nejen) matematických testů, vyhodnocování shody dat s modelem, analýzy reliability a konstrukci intervalů spolehlivosti; kromě toho v ní prezentuji i některé další vlastní myšlenky, zejména stran tzv. lokální reliability (srov. Daniel, 1999). Tato část slouží jednak jako jakýsi externí doplněk psychometrických analýz testu TIM$^{3-5}$, na kterých jsem se podílel, jednak může v budoucnu sloužit dalším psychometrikům při standardizaci jiných, nejen matematických testů.

Přeji pěkné čtení!

*Hynek Cígler,*
*v Brně dne 31. března 2018*

# ÚVOD

Psychologové se o matematické schopnosti zajímali po většinu celého 20. století a ani dnes tomu není jinak[1]. První výzkumy tyto schopnosti chápaly zejména jako součást inteligence – jejich souvislosti s tehdejším pojetím obecné inteligence (*g*-faktoru) byly zřejmé a zdálo se, že s ní souvisejí dokonce těsněji, než schopnosti zjišťované jinými výkonovými testy (např. Buckhingam, 1921). Hned po první světové válce navíc Agnes L. Rogersová (1919) shrnula tehdejší způsoby měření matematických schopností, přičemž pojmenovala dva dosud používané hlavní přístupy, které bychom z dnešního hlediska označili jako rychlost zpracování (mnoho snadných položek, omezený čas) a dosaženou vývojovou úroveň (položky se vzrůstající obtížností od velmi snadných po velmi obtížné, které umístí dítě „na škále"). Toto rozdělení však samozřejmě nebylo zcela nové a používalo se již mnohem dříve (viz např. O'Shea, 1901).

Nadšení A. L. Rogersové (1919) pro psychologické, či spíše pedagogické testování nicméně bylo vysoké: první standardizovaný americký test středoškolské matematiky byl publikovaný teprve v roce 1914, přičemž během následujících čtyř let se produkce těchto testů natolik zvýšila, že testování nabíralo na významnosti. Podle Rogersové (1919) dokonce měli učitelé nahradit subjektivní a nespolehlivé známkování „objektivním, nezkresleným a přesným měřením" (s. 162). Z tohoto hlediska jsou více než zajímavé výsledky ověřování „prediktivní validity" těchto prvních testů, tedy schopnosti predikovat budoucí nezávislé hodnocení na základě předchozího testového výsledku (samozřejmě za použití dnešní terminologie). Výsledek hodinu a půl dlouhého matematického testu koreloval $r = 0{,}82$ s budoucím, blíže nespecifikovaným matematickým výkonem studentů. Rogersová též pojmenovala důležitý jev týkající se testů školních znalostí, a to, že jednotlivé testy lze rozdělit do tří oblastí, přičemž úlohy ze stejné oblasti pak spolu zpravidla korelují těsněji než úlohy z jiných oblastí.

---

[1] Tento odstavec částečně vychází z teoretického úvodu k testu DISMAS, jehož jsem autorem (Cígler, 2013).

Z dnešního hlediska jde o vcelku banální použití faktorové analýzy, je však nutné si uvědomit, že tehdy šlo o vysoce moderní směr uvažování, vždyť základy analýzy hlavních komponent položil Pearson v roce 1901, základy faktorové analýzy pak o tři roky později Spearman (1904b). S rozpracováním způsobu odhadu hlavních komponent pak přišel až Cyril Burt v roce 1917, tedy pouhé dva roky před článkem Rogersové. (cit. dle Thorndike, 2005)

Tři hlavní oblasti školních dovedností, které Rogersová (1919) zmiňuje, jsou algebra, geometrie a jazykové dovednosti. Tyto „kompozity" pak spolu navzájem korelují v rozmezí 0,38–0,42[2], přičemž se nezdá, že by algebra a geometrie spolu byly v těsnějším vztahu než s jazyky. To do jisté míry odpovídá moderním přístupům např. v rámci CHC teorie, kde by šlo o vizuálně-prostorové (*Gv*), kvantitativní[3] (*Gq*) a jazykové (*Grw*) schopnosti tvořící samostatné faktory ze strata II (faktory druhého řádu, kam spadá například krystalizovaná inteligence *Gc*, krátkodobá paměť *Gsm* a další; viz např. Flanagan a Dixon, 2014). Celkově však byly první testy založeny spíše na různých matematických úlohách odvozených ze školního kurikula než z teorie kognitivního zpracování a nějakých modelů matematického usuzování, jak tomu zpravidla bývá dnes. Škály se zabývaly algebraickými operacemi, slovními úlohami, číselnými řadami, analýzou numerických dat, induktivním usuzováním na obecná pravidla či naopak deduktivním hledáním vztahů mezi objekty. I přes tuto značnou obsahovou roztříštěnost spolu jednotlivé škály relativně silně korelovaly. Jak už jsem uvedl výše, Rogersová (1919) pro ně proto používala termín „matematická inteligence" a považovala ji za relativně nezávislou na učení, což je samozřejmě z dnešního pohledu poněkud troufalé.

---

2 Je zajímavé, že po použití tehdy jen pár let staré Spearmanovy (1904a) korekce proti nereliabilitě (tedy pravděpodobně, tehdejší terminologie byla odlišná) pak Rogersová (1919) uvádí korelace v rozmezí 0,49–0,56. Z toho totiž můžeme usuzovat na reliabilitu tehdejších testů školních dovedností, která se mohla pohybovat zhruba okolo 0,75. V tomto ohledu je tedy pozoruhodná hodnota uvedené prediktivní validity, která je paradoxně zřejmě vyšší (anebo přinejmenším shodná) než reliabilita prezentovaných testů. Tento fakt proto bohužel vrhá nepřívětivé světlo na celé prezentované výsledky.

3 „Quantitative knowledge" (*Gq*) byly ve starších verzích CHC teorie a třívrstvého Carrollova modelu řazeny, na rozdíl od dřívější Cattelovy-Hornovy teorie, spíše pod faktor fluidní inteligence (*Gf*), viz např. Flanagan a Dixon (2014) nebo Carroll (1993).

Dnešní poznání je samozřejmě o značný kus dál, je však zjevné, že matematické schopnosti jsou velmi významné pro život člověka. Předchozí výzkum ukázal, že souvisejí například s velikostí příjmu, zaměstnatelností, kariérním postupem či životní spokojeností (Rivera-Batiz, 1992; Paglin a Rufolo, 1990; Rose a Betts, 2004; Parsons a Bynner, 2005). Na druhou stranu toho víme velmi málo o kognitivních procesech, které za matematickými schopnostmi stojí – tedy alespoň podle některých autorů (viz např. Geary, 1993; Floyd, Evans a McGrew, 2003), osobně bych se s touto myšlenkou neztotožnil, jak ostatně ukážu v následujících kapitolách. Samotné matematické schopnosti jsou však definovány velmi vágně, ad hoc pro každý jednotlivý případ: např. jako prostá účast v příslušných univerzitních kurzech, školní prospěch v matematických předmětech, skóry v různě operacionalizovaných testech. Ne ve všech výzkumech byl také kontrolován parciální vliv ostatních intelektových složek, což navíc komplikuje naše závěry – pokud bychom například uváděli do vztahu finanční příjem a matematické schopnosti respondentů, pozorovali bychom pozitivní korelaci. To proto, že inteligence pozitivně souvisí jak s příjmem (např. Ceci a Williams, 1997), tak s matematickými schopnostmi, a proto i matematické schopnosti budou s příjmem souviset. Prostá korelace však neposkytne odpověď na otázku, zda souvisí s příjmem i ta část matematických schopností, která „není vysvětlena“ celkovým intelektem; jinými slovy, zda matematické schopnosti a příjem spolu souvisejí „nad rámec“ vztahu s inteligencí.

V následujících kapitolách se proto důkladně zaměříme na deskripci schopností a dovedností, které mají vztah k matematickému výkonu, a následně stručně popíšeme jejich krajní póly: specifické poruchy učení v matematice a naopak mimořádné matematické nadání. Předtím ale bude nezbytné vymezit hlavní termíny, zda mluvíme o matematických „schopnostech“, nebo „dovednostech“.

## MATEMATICKÉ SCHOPNOSTI NEBO DOVEDNOSTI?

Ve výzkumu bývají často diferencovány matematické schopnosti a dovednosti. Jako schopnosti (v anglické literatuře zpravidla „mathematical ability“) jsou zpravidla označovány kognitivní a exekutivní složky zodpovědné za provádění matematických operací od jednoduchých výpočtů až po komplexní matematické úsudky. Tyto dovednosti bychom nemuseli označit vždy za „ryze matematické" – patří sem do jisté míry totiž i například ty součásti pracovní paměti, které jsou zodpovědné za nakládání s numerickými či vizuálně-prostorovými objekty a mají přímý vliv na podávaný matematický výkon (Hitch a McAuley, 1991; Wilson a Swanson, 2015).

Naopak dovednosti (v angličtině „skills" nebo „mathematical achievement") bývají zpravidla definovány jako konkrétní úroveň vývoje matematických znalostí více závislá na učení. Jako takové jsou dovednosti těsněji spjaté jednak se školním kurikulem a celkově s naučenými znalostmi, ale zároveň i s nevýkonovými charakteristikami, jako například motivací, self-efficacy apod. – zvýšení úrovně těchto charakteristik vede i k vyššímu výkonu (např. Brown a Burton, 1978; Bandura a Schunk, 1981). Ačkoliv nízký školní výkon v matematických předmětech vede k celkově negativním postojům vůči matematice, samotné matematické dovednosti nemusejí být (ve srovnání například se čtením) zpětně těmito postoji tolik ovlivněny (Onatsu-Arvilommi a Nurmi, 2000), což by svědčilo ve prospěch spíše dispozičního zakotvení matematických dovedností oproti např. schopnostem jazykovým. Jiní autoři nicméně udávají zpětnovazebný posilující vztah matematického výkonu a motivace (Aunola, Leskinen a Nurmi, 2006), kde vyšší motivace vede k vyššímu výkonu, a ten zase zvyšuje motivaci. Rozdíl mezi těmito výzkumy mohl být způsoben právě v rozdílném pojetí matematických schopností spíše jako výkonu či spíše jako schopnosti.

Rozdíl mezi matematickými schopnostmi a dovednostmi však samozřejmě není jednoznačný, složitý matematický úsudek není možný bez odpovídajících teoretických znalostí. Na tento problém jsme ostatně narazili s Michalem Jabůrkem (nepubl.) při tvorbě položek testu zaměřeného na matematický úsudek (nejen) u dospělých osob, kdy zejména ve vyšších výkonových pásmech bylo velmi obtížné vytvořit položky s malým podílem znalostního faktoru. Zároveň však platí, že nižší úroveň matematických schopností vede zpětně též k horšímu pamatování aritmetických faktů (Shalev & Gross-Tsur, 2001; Landerl, Bevan a Butterworth, 2004; Geary, 1993) – osvojení si hlubokých matematických znalostí není možné bez odpovídající míry jejich chápání. Podle mého názoru je matematický výkon více „hierarchický" a více založený na prerekvizitních znalostech, než dovednosti v jiných školních předmětech. Zanedbání učení na určitém stupni vývoje neznamená jen nedostatek v tom kterém konkrétním učivu, ale i horší osvojování následující látky, nižší rozvoj matematických dovedností… a tak dále, případné potíže se kumulují.

Dále se ukazuje, že i při kontrole řady intervenujících demografických proměnných jsou rané matematické dovednosti v dětství (např. v deseti letech), a to zejména dělení a zlomky, nejsilnějšími prediktory zvládnutí středoškolské algebry a matematiky celkově (Siegler a kol., 2012). Efekt byl zhruba stejně silný, jako v případě testů inteligence – rané matematické dovednosti však naopak prakticky neměly vliv na budoucí výkon jazykových schopností, na rozdíl od intelektových prediktorů. Zajímavé také je, že i na střední škole znalost zlomků souvisí s celkovým matematickým výkonem těsněji než s algebraickými znalostmi, ke kterým má obsahově blíže – základní matematické znalosti se tak přímo promítají do aktuálního výkonu, neovlivňují jen způsob učení (Siegler a kol., 2012). Je samozřejmě otázkou, nakolik je tento vztah přímý a nakolik je moderován či mediován motivací či self-efficacy.

Celou situaci problematizuje i fakt, že intelekt (reprezentovaný například testy inteligence) bývá implicitně považován za „schopnost“, kdežto matematický výkon za „dovednost“ (např. Fuchs, Fuchs a Compton, 2006). Příkladem může být studie Schiefele a Csikszentmihalyi (1995), kde jsou schopnosti vymezené skórem v „testu schopností“ (v tomto případě Preliminary Scholastic Aptitude Test, PSAT-M) a dovednosti či výkon školním hodnocením, typicky GPA (Grade Point Average, používaným v anglosaských zemích). Tento předpoklad ovšem na základě empirických zjištění může být chybný, jak si ukážeme níže ještě podrobněji. Součástí CHC teorie inteligence jsou totiž jako jeden z faktorů druhého řádu Kvantitativní znalosti (*Gq*), které McGrew a Evans (2004, s. 11) definují jako „*… hluboké* […] *deklarativní i procedurální kvantitativní vědomosti. Gq je z velké části nabyto používáním jiných schopností převážně během formálního vzdělávání.* […] *Gq reprezentuje spíše kapacitu dosažených matematických znalostí než usuzování v této oblasti.*“[4] Přitom však dodávají, že samotné matematické

[4] *„A person's wealth (breadth and depth) of acquired store of declarative and procedural quantitative knowledge. Gq is largely acquired through the ‚investment' of other abilities primarily during formal educational experiences. It is important to recognize that RQ, which is the ability to reason inductively and deductively when*

usuzování (*RQ*) jako schopnost deduktivního a induktivního uvažování při řešení kvantitativních problémů (přesněji *„matematických vztahů a vlastností*“, s. 6), spadá spíše do faktoru fluidní inteligence (*Gf*). Navíc je technicky možné z úrovně *Gq* usuzovat jakožto z faktoru druhého řádu i na úroveň celkové inteligence (*G*). Je tedy patrné, že apriorní dělení schopností a dovedností podle „znalostních“ a „inteligenčních“ testů je snadno zpochybnitelné. Rozdělení matematických schopností jako spíše rysové a dovedností jako spíše osvojené složky proto z psychometrického hlediska není vůbec jednoznačné.

Na vztah matematických schopností a dovedností lze dále nahlížet i z vývojové perspektivy, kterou se nicméně budeme podrobněji zabývat později. Příkladem mohou být piagetovské přístupy ke studiu osvojování matematických dovedností (např. Piaget a Szeminska, 1952; Beth a Piaget, 1974; Piaget a Inhelderová, 2014). V posledních letech se empirickým studiem vývoje matematických dovedností a možnostmi jejich rozvoje nad vrozenou úroveň zabýval např. Geary (1994; 1995; 2007). Pochopení procesů, které vedou k osvojení matematických dovedností na základě vrozených schopností, nám pochopitelně umožňuje obě oblasti podrobněji odlišit.

Na základě výše uvedené literatury však spatřuji jeden společný rys, který poměrně přesně odděluje matematické schopnosti od dovedností a který budu používat pro dělení i v následujícím textu. Matematickými schopnostmi jsou častěji označované ty kognitivní schopnosti, které vedou k vyřešení neznámých[5] matematických problémů s využitím znalostí, jež jsou dostupné naprosté většině populačního ročníku, případně pak s využitím pravidel, které lze v rozumném čase logicky odvodit bez nutnosti jejich předchozí znalosti. Naopak matematické dovednosti se projevují jako konkrétní výkon v úkolech přiměřených kurikulu, přičemž kombinují znalosti dostupné jen některým dětem s postupy vyžadujícími zapojení matematických schopností. Je však samozřejmé, že pokročilé matematické znalosti umož-

---

*solving quantitative problems, is not included under Gq, but rather, is included in the Gf domain. Gq represents an individual’s store of acquired mathematical knowledge, not reasoning with this knowledge.*“ (McGrew a Evans, 2004, s. 11)

[5] Což je důležité – zde máme na mysli skutečně problémy, které testovaná osoba nezná, a jejichž řešení musí „vymyslet“. Srovnej s rutinními a nerutinními problémy podle Mayera a Hegartyové (1996) níže v kapitole o kognitivně-informačním přístupu.

ňují rozsáhlejší rozvoj a zejména uplatnění matematických schopností; naopak matematické schopnosti umožňují osvojení si a naučení pokročilejších matematických znalostí, a tedy i projevení dovedností. Z tohoto pohledu je tedy předložené členění spíše instrumentalistické a nezaměřuje se na etiologii těchto schopností či dovedností.

I nadále je navíc nutné držet v paměti, že oba pojmy jsou stále značně nejasné a jejich význam se silně prolíná. Cílem této práce ovšem není výzkum dosahování úrovně znalostí vyžadovaných ve škole – veškeré studium kurikula bylo pouhým prostředkem k identifikaci běžných úkolů s obtížností přiměřenou věku. Primárně se proto zaměřuji právě na matematické schopnosti, jakožto *komplexní, v čase relativně stabilní psychický jev* (Libertus, Feigenson a Halberda, 2011; Jordan a kol., 2006; Jordan a kol., 2009; Siegler a kol., 2012; Mazzocco a Thompson, 2005).

## SHRNUTÍ PŘÍSTUPŮ KE STUDIU MATEMATICKÝCH SCHOPNOSTÍ

Možností výzkumu matematických schopností a dovedností je celá řada. Mohou se lišit například objektem svého zájmu, tedy zda se zaměřují na výzkum neurokognitivního pozadí zpracování čísel, osvojování si matematických konceptů či vztahu k jiným kognitivním schopnostem. Každý z těchto výzkumných směrů si pochopitelně nese svou vlastní metodologii a své vlastní typické výzkumné postupy.

Sternberg a Ben-Zeev (1996) v úvodu (a závěru) své vynikající knihy *The Nature of Mathematical Thinking* popisují pět možných úhlů pohledu na matematické schopnosti:

- **Psychometrický přístup**, reprezentovaný faktorovými teoriemi (nejen) inteligence. Ten se zaměřuje na běžnou populaci a na vztah matematických schopností k jiným kognitivním a intelektovým rysům.
- **Kognitivně-informační přístup** („výpočetní“), zaměřený na zpracovávání matematických informací. Typickými tématy jsou postup docházení ke správným či chybným řešením a způsob operacionalizace matematických konceptů v lidské mysli.
- **Kognitivně-kulturní** („antropologický“), který chápe matematické uvažování jako součást kulturně závislého porozumění světu, navíc s určitými biologickými predispozicemi. Témata jsou velmi

podobná jako v předchozím, kognitivně-informačním přístupu, výzkumníci se však častěji zaměřují na vliv jazykových či kulturních rozdílů v matematickém porozumění. Z těchto důvodů sem Sternberg a Ben-Zeev (1996) zahrnují i tzv. piagetovské přístupy.

- **Kognitivně-vzdělávací přístup** („pedagogický“), který jde „odzadu“ a sleduje děti učící se matematice. Sleduje, které didaktické postupy a metody jsou výhodné pro výuku matematických dovedností, jaká jsou možná ohrožení jejich dobrého osvojení.
- A konečně **matematický přístup**, který se zaměřuje na strukturu matematických faktů a principů a propojuje tak psychologii a matematiku jako vědu. V tomto ohledu jsou klíčové různé simulační studie; psychologické poznatky jsou dosazovány do struktury abstraktních matematických pojmů tak, jak je chápe matematická teorie.

První tři přístupy jsou z pohledu psychologa či psychologické diagnostiky nejzajímavější. Zaměřují se spíše na matematické schopnosti (nikoliv dovednosti), definují, co matematické schopnosti vlastně jsou, a zasazují je do kontextu ostatních kognitivních schopností. Pedagogický přístup je potom užitečný do té míry, že nám umožňuje zkoumat, jakým způsobem klást otázky při psychologickém testování, a jak konstruovat položky při zjišťování míry matematických schopností. Poslední, matematický přístup nepřináší z hlediska psychologie žádné zásadní informace, které by mohly rozšířit diskuzi o měření matematických schopností – snad jen v případě, že by se tato práce věnovala ověřování didaktických znalostí a schopností studentů matematických oborů.

V následujících kapitolách proto budu sledovat tuto strukturu a postupně se zaměřím na tato čtyři témata – pohled matematiků na to, jaké klíčové charakteristiky musí vykazovat lidé věnující se jejich oboru, však zcela vynechám.

Závěrem by nicméně bylo vhodné zmínit ještě „filozofický“ přístup k matematickým schopnostem a k reprezentaci matematických konceptů, kterým se zabývali např. Wittgenstein, Peano, Russell, Frege a další (cit. dle Miller, 1992). Ten se však týká spíše toho, co to je číslo jako takové v kontextu lidského myšlení, a svou teoretickou diskuzí se podobá přístupu matematickému (ostatně Russell, Peano i Frege byli mimo jiné i matematiky). Pro praktické účely této práce jej bude možné rovněž pominout.