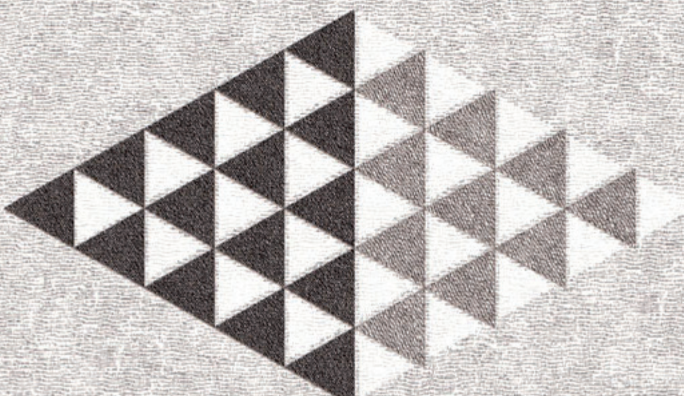
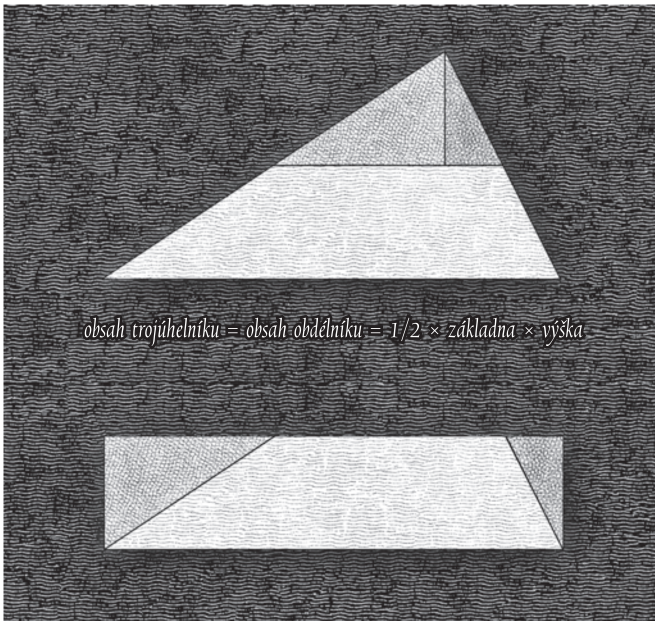
Q. E. D.

Krása matematického důkazu



Burkard Polster


obsah trojúhelníku = obsah obdélníku = 1/2 × základna × výška

Burkard Polster

Q. E. D.

Krása matematického důkazu

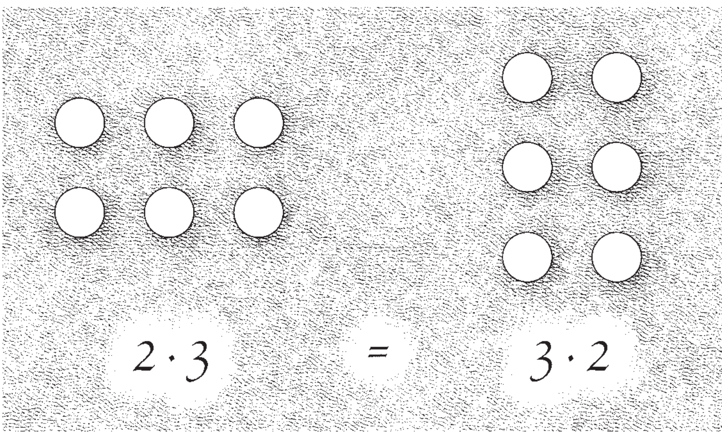
Designed and typeset by Wooden Books Ltd, Glastonbury, UK.

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).
Z anglického originálu *Q. E. D. Beauty in Mathematical Proof*
přeložil Luboš Pick.
Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.
Sazba a konverze do elektronické verze Tomáš Zeman.
Vydalo v roce 2014 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, Praha 5, dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 734. publikaci (175. elektronická).

ISBN 978-80-7363-672-2

Q.E.D.

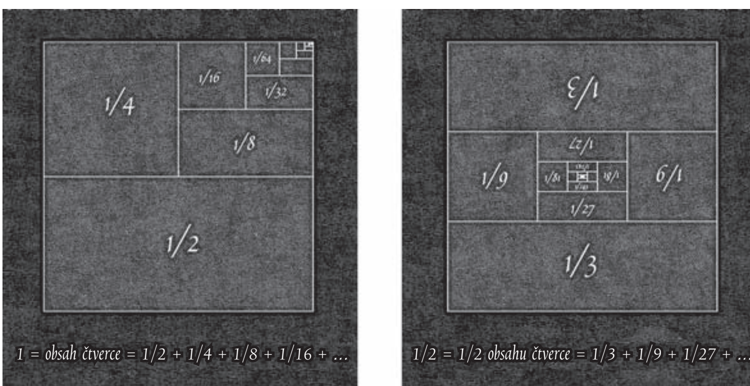
Krása matematického důkazu



Burkard Polster

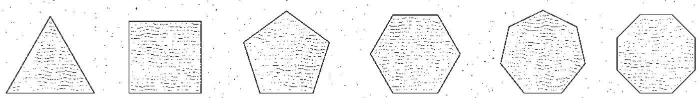
Věnováno s láskou Anu. Ta tomu všemu rozumí…

Cítím se zavázán mnoha matematikům z minulosti i přítomnosti, z jejichž nápadů a myšlenek jsem tuto knihu sestavil. Děkuji Mary Rossové a Johnu Stillwellovi za jejich kritiku a podnětné připomínky. Konečně děkuji z celého srdce také Johnu Martineauovi a Daudu Suttonovi, kteří mi byli trpělivými průvodci a pomocníky při otevírání onoho oka cyklónu, jež vede přímo do nádherného světa matematického důkazu.



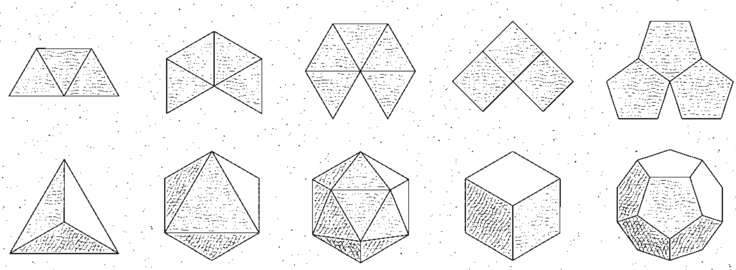
Dvě nekonečné řady na podnosu, připravené k podávání.

Obsah



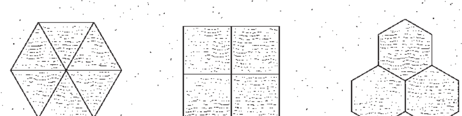
trojúhelník čtverec pětiúhelník šestiúhelník sedmiúhelník osmiúhelník

Pravidelný mnohoúhelník je konvexní dvojrozměrný útvar s identickými stranami a úhly. Existuje jich nekonečně mnoho.



čtyřstěn osmistěn dvanáctistěn krychle dvacetistěn

Pravidelný mnohostěn je konvexní trojrozměrné těleso, jehož všechny stěny jsou identické, mají tvar pravidelného mnohoúhelníku a u každého vrcholu se jich sejde stejný počet. Na obrázku nahoře vidíme různé způsoby, jak spojit tři nebo více pravidelných mnohoúhelníků v jednom bodě tak, aby nám ještě zbylo místo na jejich přehnutí do třetí dimenze. Dá se dokázat, že uvedené metody k sestrojení prostorových rohů jsou svého druhu unikátní, tedy jediné možné, a že vedou ke konstrukci proslulých pěti pravidelných těles.



Stejnou úvahou je možné ověřit, že existují jen tři možnosti, jak vydláždit beze zbytku celou rovinu pomocí stejných pravidelných mnohoúhelníků.

ÚVOD

Existuje několik matematických objektů, jejichž krásu je schopen vychutnat úplně každý. Jako příklad poslouží třeba pravidelné mnohoúhelníky nebo mnohostěny. Ty v dokonalosti předčí snad už jedině kruh nebo koule. A co taková Pythagorova věta, úhelný kámen pravoúhlého světa, kterým se záměrně obklopujeme? Nebo kuželosečky, které popisují dráhy nebeských těles?

Jen málo lidí ovšem ocení více než pár základních aspektů půvabu nádherného světa matematiky. Odhalení podstatné části této krásy je totiž obvykle dopřáno výhradně matematikům, a to ještě pouze při studiu či vymýšlení mistrně vysoustruhovaných důkazů, na které jen tak tak dosáhne pouze pár těch nejlépe trénovaných mozků světa.

Pokud chci já jakožto matematik veřejně prohlásit, že jsem ověřil pravdivost tvrzení nějaké věty, provedu to tak, že na konec jejího důkazu připíši tři písmena Q. E. D. To je zkratka latinského slovního obratu *quod erat demonstrandum* (do češtiny se dříve překládalo C. B. D. – „což bylo dokázati“, neboli „což mělo být dokázáno“). Takže Q. E. D. je na jedné straně milníkem pravdy a matematické krásy, na druhé straně ovšem zároveň reprezentuje zdánlivě nedosažitelnou stránku této pravěké vědy.

„Q. E. D.“ ale najdeme také na konci některých překvapivě úžasně jednoduchých a oku lahodících důkazů. Sbírkou několika takových zázračných klenotů, jakož i myšlenek v jejich pozadí Vás provede tato knížka, která byla napsána pro každého, koho zajímá krása matematiky ukrytá pod povrchem.

Melbourne, červenec 2003

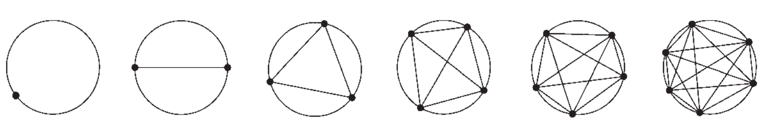
Proradná pravda

co je to vlastně důkaz

V matematice, podobně jako v přírodních vědách, můžeme udělat pokus nebo ověřit několik případů, a podle výsledku zformulovat určitou domněnku. V matematice však důkaz nelze nahradit žádným experimentem, ať už naše domněnka vypadá sebevíce přirozená a zjevná. Podívejme se třebas na to, na kolik oblastí lze nejvýše rozdělit kruh spojnicemi 1, 2, 3, 4, 5 a 6 bodů na jeho obvodu (*dole*). Překvapivě to je 1, 2, 4, 8, 16 a… 31, nikoli 32 (!), jak by se dalo čekat.

Nebo se podívejme třeba na proslulou Goldbachovu domněnku. Ta tvrdí, že každé sudé číslo větší než dvě je součtem dvou prvočísel, jako například 12 = 5 + 7 nebo 30 = 23 + 7. Tvrzení domněnky bylo sice ověřeno pro mnoho milionů případů, avšak dokud nebude nalezen důkaz, nemůžeme si nikdy být zcela jisti, že ji třeba hned ten příští případ, který někdo zkusí prověřit, nevyvrátí.

Důkaz matematického tvrzení by měl být co nejsrozumitelnější, co nejelegantnější, a hlavně co nejnázornější. Podívejme se (*naproti nahoře*) na důkaz tvrzení, že se číslo 0,9999… (jehož nekonečný desetinný rozvoj je složen ze samých devítek) rovná číslu 1. Ten uvedené požadavky nepochybně splňuje. Jeho hlavní myšlenku lze navíc velmi snadno upravit k přeměně mnoha čísel s obávanými periodickými rozvoji do podstatně příjemnějších tvarů. Důkaz tvrzení, že šachovnici zbavenou dvou protilehlých rohových políček není možné pokrýt dominovými kostkami (*naproti dole*), je dalším takovým příkladem. A i tento důkaz lze samozřejmě použít pro mnoho dalších typů zmrzačených šachovnic.



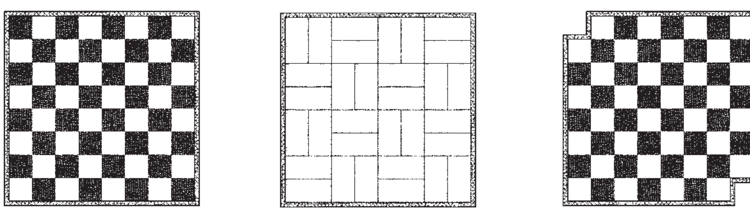
Věta: 1 = 0,999 ...

Důkaz: Nechť x = 0,999... . Potom

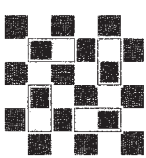
$$\begin{aligned} 10\,x &= 9{,}999\ldots \\ -\,x &= 0{,}999\ldots \\ \hline =9\,x &= 9{,}000\ldots \end{aligned}$$

Tedy x = 1,000...

Q. E. D.



Je snadné pokrýt obyčejnou šachovnici dominovými kostkami. Šachovnici zbavenou dvou protilehlých rohových políček jimi však pokrýt nelze.



Důkaz: Při jakémkoli dláždění pokryje jedna dominová kostka vždy jedno černé a jedno bílé políčko. Pokaždé tedy pokryjeme stejný počet bílých a černých políček. Na naší upravené šachovnici je ale bílých políček o dvě méně než černých a proto ji dominovými kostkami nelze pokrýt. Q. E. D.

Pythagorova věta

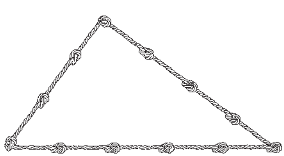
důkaz řezáním

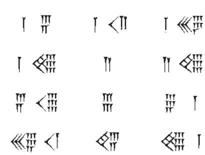
Slavná Pythagorova (asi 569–475 př. n. l.) věta praví, že v pravoúhlém trojúhelníku se čtverec nad nejdelší stranou (přeponou) rovná součtu čtverců nad odvěsnami (*naproti nahoře*). Dnes se to algebraicky zapisuje $a^2 + b^2 = c^2$.

Důkaz: Poskládáme čtyři stejné kopie daného pravoúhlého trojúhelníku se stranami a, b a c do velkého čtverce o straně $a + b$ tak, aby ve čtverci zůstala volná dvě čtvercová políčka o stranách a a b (*naproti, uprostřed vlevo*). Ve stejném čtverci lze tytéž čtyři trojúhelníky uspořádat tak, aby uprostřed velkého čtverce zůstal volný jeden čtverec o straně c (*naproti, uprostřed vpravo*). V obou případech se obsah nepokryté plochy rovná obsahu velkého čtverce minus čtyřnásobek obsahu daného trojúhelníku. Tudíž se součet obsahů dvou čtverců, tedy $a^2 + b^2$, rovná obsahu čtverce c^2. Q. E. D.

Platí i naopak (nutný je ovšem nový důkaz), že jestliže strany trojúhelníku splňují výše uvedený vztah, pak je tento trojúhelník pravoúhlý.

Přirozená čísla, která vyhovují rovnici $a^2 + b^2 = c^2$ se nazývají pythagorejskými trojicemi. Starověká konstrukce pravého úhlu pomocí smyčky vytvořené z provázku s $3 + 4 + 5 = 12$ uzly stejně od sebe vzdálenými (*dole vlevo*), je založena na pythagorejské trojici 3 : 4 : 5. Babylonská hliněná tabulka (Plimpton 322), na níž nalezneme trojice čísel odpovídající pythagorejským trojicím (*dole vpravo*), naznačuje, že slavná věta byla možná známa dávno před Pythagorem.



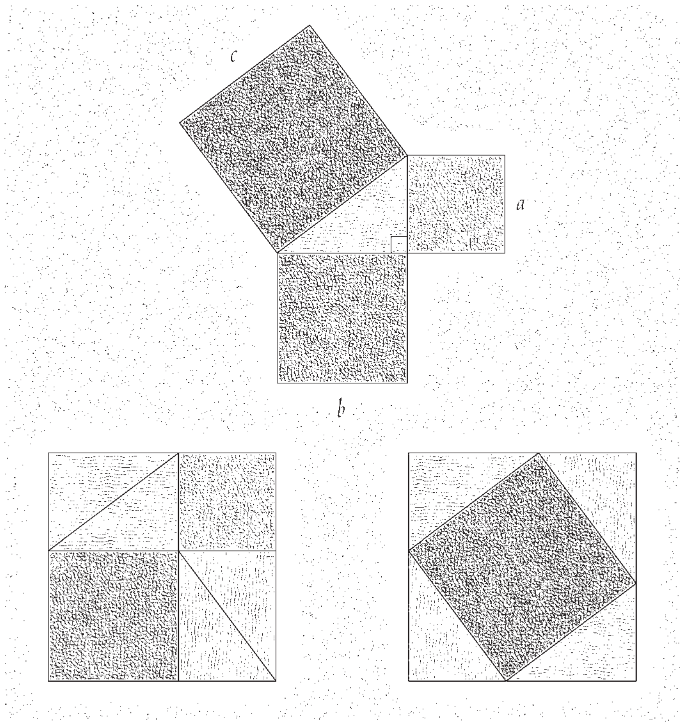


$65^2 + 72^2 = 97^2$

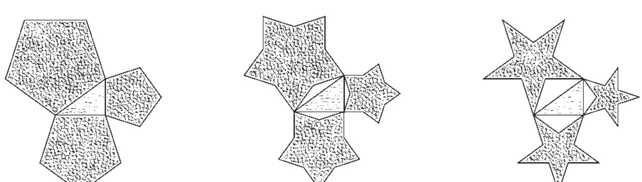
$119^2 + 120^2 = 169^2$

$319^2 + 360^2 = 481^2$

$2291^2 + 2700^2 = 3541^2$



Jestliže místo čtverců přiložíme ke stranám trojúhelníku jakékoli jiné tři vzájemně si podobné útvary, pak lze opět dokázat, že obsah největšího z nich bude roven součtu obsahů dvou menších.



Jednoduše a na rovinu

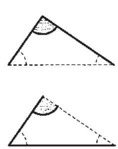
základní nástroje důkazů

Eukleidova (přibližně 325–265 př. n. l.) kniha *Základy* nastavila laťku matematické důslednosti již před velmi dávnou dobou. Protože jde o jednu z nejoblíbenějších učebnic všech dob, promítl se její obsah z velké části také do našeho kulturního dědictví.

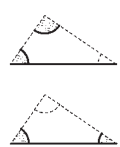
Ve třinácti dílech své knihy vybudoval Eukleides složitou síť vět, jejichž hloubka neustále narůstá. Tvrzení jsou propojena logickými argumenty a všechna jsou postupně odvozena z několika intuitivních faktů, zvaných *axiomy* či *postuláty*. V rámci přípravy na zbývající část této knihy vyjděte ze čtyř jednoduchých faktů uvedených vpravo a zkuste s jejich pomocí dokázat věty uvedené vlevo.

K tomu musíte být schopni na první pohled rozeznat dva různé typy „stejnosti“ dvou trojúhelníků. Dva trojúhelníky jsou *podobné*, jestliže mají stejné úhly. Vzhledem k tomu, že dvěma úhly v trojúhelníku je již určen třetí úhel, stačí k důkazu podobnosti dvou trojúhelníků ověřit, že mají alespoň dva úhly stejné. Dva trojúhelníky jsou *shodné*, jestliže mají stejně dlouhé strany. Tento případ nastává, pokud je alespoň jedna z pěti kombinací tří úhlů a tří stran naznačených na obrázku dole vlevo shodná u obou trojúhelníků. Například na diagramu dole vpravo jsou dva šedé trojúhelníky shodné, protože mají stejné dvě strany *r* a *m* a jeden pravý úhel, čímž je ověřena shodnost jedné z uvedených kombinací. Odtud dále plyne, že jsou také oba úseky *s* a *t* na tečnách ke kruhu shodné.

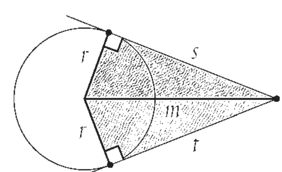
tři strany



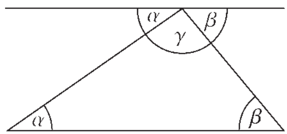
dvě strany a jeden úhel



jedna strana a dva úhly

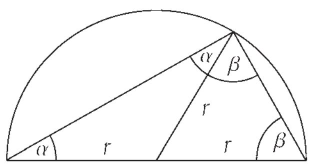


Součet úhlů v trojúhelníku.



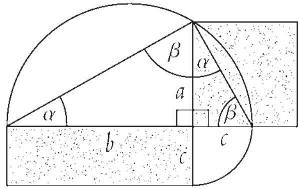
Součet úhlů $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Thaletova věta:



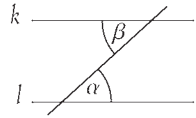
Horní úhel $\alpha + \beta = 90°$.

Kvadratura obdélníku:



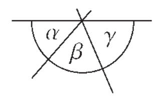
obsah čtverce = $a^2 = bc$ *= obsah obdélníku*
(z podobnosti trojúhelníků $a/c = b/a$*).*

Jsou-li přímky k a l rovnoběžné,



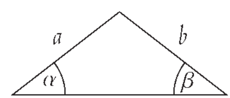
pak $\alpha = \beta$.

Jestliže



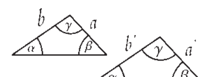
pak $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Jestliže $a = b$,



pak $\alpha = \beta$*, a naopak.*

Pro podobné trojúhelníky



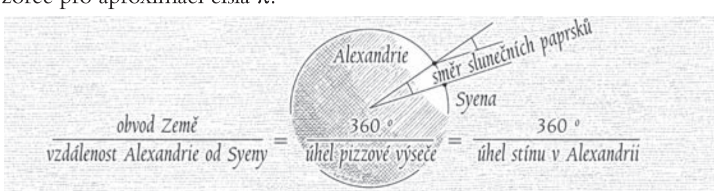
platí $a/a' = b/b'$.

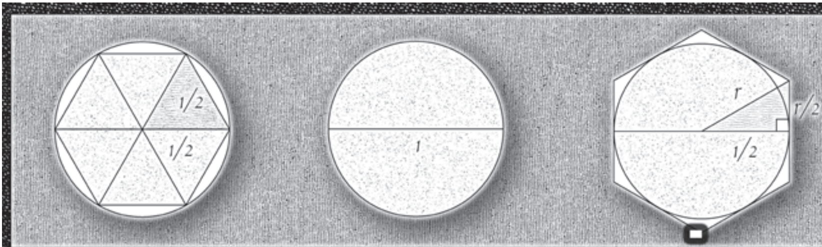
Najdete pí v pizze?

záhady kruhu

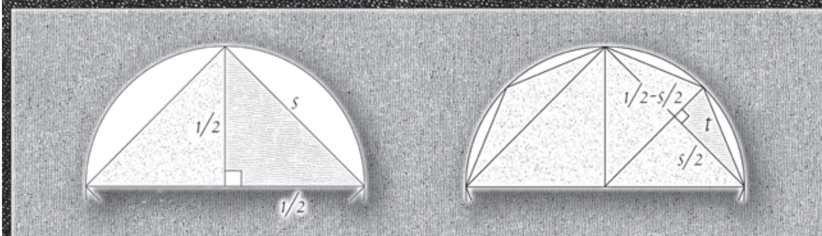
Eratosthenes z Kyreny (276–194 př. n. l.) se proslavil svou takzvanou koláčovou metodou výpočtu obvodu Země, založenou na vzdálenosti Alexandrie od Syeny (dnešní Asuán) a úhlu stínu v Alexandrii v okamžiku, kdy v Syeně Slunce svítilo až na dno hluboké studny. Pomocí vzorce *průměr kruhu* × π = *obvod kruhu* spočítal také průměr Země. Naštěstí jeho kolega Archimedes, s nímž si dopisoval, poskytl pro onu těžko polapitelnou hodnotu záhadného čísla π velmi rozumný odhad.

Vzhledem k tomu, že π je obvod kruhu s průměrem rovným jedné, je toto číslo nepochybně větší než obvod jakéhokoli pravidelného mnohoúhelníku vepsaného do kružnice a menší než obvod jakéhokoli mnohoúhelníku kružnici opsaného (*naproti nahoře*). Čím více stran onen mnohoúhelník bude mít, tím spíše se bude jeho obvod blížit obvodu kruhu. Naštěstí je snadné vypočítat z obvodu jednoho takového mnohoúhelníku obvod mnohoúhelníku o dvojnásobném počtu stran (*naproti uprostřed*). Archimedes vyšel z pravidelného šestiúhelníku a postupně spočítal obvody pravidelného dvanáctiúhelníku, čtyřiadvacetiúhelníku a dále mnohoúhelníků o 48 a 96 stranách, čímž odhadl hodnotu čísla pí mezi hodnotami 3 10/71 a 3 10/70. Posledně uvedená hodnota je rovna 22/7, což je odhad hodnoty π, který se používá v mnoha učebnicích dodnes. Použijeme-li místo šestiúhelníku jako výchozí mnohoúhelník čtverec (*naproti dole*), dostaneme vzorec pro aproximaci čísla π.





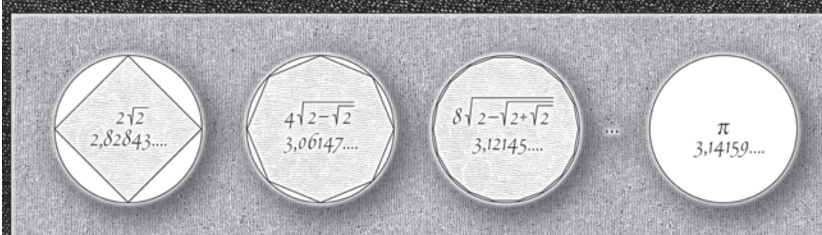
obvod vepsaného šestiúhelníku = 6 (½) = 3 < obvod kruhu = π < obvod opsaného šestiúhelníku = = 6 r = $2\sqrt{3}$ = 3,4641…



Na každý pravoúhlý trojúhelník použijeme Pythagorovu větu a vypočítáme délky stran s a t. Pak

obvod čtverce = 4 s = $2\sqrt{2}$

obvod osmiúhelníku = 8 t = $4\sqrt{(2-\sqrt{2})}$



$2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}$ (n − 1 odmocnin) je obvod vepsaného mnohoúhelníku o 2^n stranách.