

NOVÁ INFINITNÍ MATEMATIKA

KAROLINUM



Prolegomena

PETR VOPĚNKA

Nová infinitní matematika
Prolegomena

prof. RNDr. Petr Vopěnka, DrSc.

Recenzovali:

doc. Dr. RNDr. Miroslav Holeček

prof. RNDr. Jan Kopka, CSc.

Vydala Univerzita Karlova v Praze

Nakladatelství Karolinum

Redakce Lenka Ščerbaničová

Obálka Jan Šerých

Sazba a technická spolupráce Mgr. Marie Větrovcová, Ph.D.

Vydání první

© Univerzita Karlova v Praze, 2014

© Petr Vopěnka, 2014

ISBN 978-80-246-2566-9

ISBN 978-80-246-2591-1 (online : pdf)



Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum 2015

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Předmluva	9
1. Antický geometrický svět	10
2. O bytostech nadpřirozených	11
3. Antická geometrie	13
4. Milníky na cestě ke Cantorově teorii množin	16
5. Bernard Bolzano	17
6. Cantorova teorie množin	18
7. Varování	20
8. Množinová matematika dvacátého století	21
9. Dvě další důrazná varování	24
10. Ultraprodukt	26
11. Problém metamatematických přirozených čísel	27
12. Množina všech přirozených čísel neexistuje	29
13. Neblahé důsledky pro veškerou infinitní matematiku opírající se o Cantorovu teorii množin	31
14. Šedesátá léta dvacátého století	32
15. Hledání alternativy	34
16. Nové základy	35
16.1 Obzor	35
16.2 Nekonečno, o něž jde	37
16.3 Geometrický obzor	38
16.4 Obor konečných přirozených čísel	39
16.5 Postulát slabé aktualizovatelnosti	40
17. Závěrečná poznámka	42
Appendix Přirozená čísla v terra incognita	43
Literatura	47

... vtom Ikaros začal mít radost, jak odvážně létá, opustil svého vůdce a touhou po nebi zlákan, příliš vysoko vzlétl. Hned blízkost žhavého slunce vonný mu rozhřeje vosk, jenž pera křídel mu pojil. Roztaje vosková vazba, hoch holými pažemi mává, nemá už pernatá vesla, vzduch nemůže zachytit žádný...

Ovidius, *Proměny VIII*

Předmluva

V tomto pojednání je zřetelně vysloveno to, co od šedesátých let dvacátého století mnozí matematikové podvědomě cítili, ale obávali se vynést na světlo. Totiž že obor všech přirozených čísel není aktualizovatelný, následkem čehož množina všech přirozených čísel neexistuje. Tato skutečnost odsunuje celý svět klasické infinitní množinové matematiky, založený právě na existenci množiny všech přirozených čísel, mezi pouhé iluze. Neboť:

Existence množiny všech přirozených čísel je tím, na čem stojí a s čím padá téměř veškerá infinitní matematika dvacátého století.

V tomto iluzorním světě matematiky dvacátého století však bylo mnoho krásného a důmyslného vykonáno, takže jeho podlomení způsobené vyvrácením jeho základního kamene by mohlo být považováno za čin barbarský. Jde tedy též o to, co se dá z infinitní matematiky dvacátého století ještě zachránit.

1. Antický geometrický svět

Pokud historik má v úmyslu autenticky popisovat nějaké dávné události, pak se musí snažit vstoupit do atmosféry příslušné doby. To znamená vnitřně a vcítěně (empaticky) ty události prožívat, a ne z vnějšího pohledu na nich popisovat jen to, co by dnes mohlo být zajímavé.

Nejde pochopitelně jen o události politické. Nejinak je tomu v případě zrodu nějakého duchovního proudu, úvah filosofických, výtvorů technických a podobně. Jen hlupák se může posmívat nejstaršímu autu vystavenému v technickém muzeu, neboť důmysl do něj kdysi vložený vysoce přesahuje schopnosti tohoto hlupáka.

Událostí vsutku světodějnou, která dva a půl tisíce roků určovala charakter evropské vědy, byl objev antického geometrického světa. Byl to nejspíše **Pythagoras**, kdo první našel pod čarami nakreslenými v písku čisté geometrické tvary. Byl to nejspíše **Platon**, kdo z nich vybral ty, na nichž se čistě a zřetelně ukazují geometrické ideje: idea tvaru a idea velikosti. Jsou jimi především přímky (přesněji úsečky) jakožto představitelky ideje přímosti, neboť jsou všude stejně přímé, a kružnice jakožto představitelky ideje křivosti, neboť jsou všude stejně křivé.¹

Dále dva timaiovské trojúhelníky: pravoúhlý rovnoramenný a pravoúhlý, jehož přepona je dvakrát tak dlouhá jako jedna z odvěsen,² jakožto představitelé ideje pravého úhlu. K nim pak Platon předvídavě přidal ještě čtverec,³ čímž dotvořil základy antického geometrického světa. Čtverec je nositelem ideje celosti (dokonalosti), což vynesl na světlo teprve až **Carl Gustav Jung**.⁴ Za dva tisíce let pak věda o tomto antickém geometrickém světě obdržela název **geometrie eukleidovská**.

¹Úsečky a kružnice nebyly vybrány proto, že je lze dobře kreslit užitím pravítka a kružítko. Naopak tyto nástroje byly vyráběny proto, že je lze výhodně používat při kreslení úseček a kružnic na papíru. Praktičtí geometři (herpedonaptové) používali ke kreslení obrázků úseček a kružnic (a nejen jich) v písku provaz.

²Připomeňme, že ještě nedávno dřevěné modely těchto dvou trojúhelníků patřily do školní výbavy každého středoškoláka.

³Viz Platonův dialog *Timaios*.

⁴Srov. Carl G. Jung, *Výbor z díla*, sv. VI. 'Představy a spásy v alchymii', s. 12–13, a dále sv. V. 'Snové symboly individuálního procesu', s. 49.

2. O bytostech nadpřirozených

Každé období evropských dějin má své nadpřirozené bytosti. Jejich nadpřirozenost spočívá především v tom, že mají schopnosti přesahující schopnosti lidí. Tyto bytosti žijí mezi lidmi a mohou zasahovat do jejich životů a nezřídka i osudů.

Není tomu tak dávno, kdy v Krkonoších žil Krakonoš, na Šumavě divý muž a divoženka, ve Vltavě vodník a mezi lidmi ve městech a na vesnicích čarodějové a čarodějnice. Většina z těchto nadpřirozených bytostí měla schopnost učinit se neviditelnými, což umožňovalo vykládat některé dokonce i přírodní jevy jako výsledky jejich skrytého působení.

Křesťanství k této plejádě nadpřirozených pohanských bytostí přidalo anděly a ďábly. Tito poslední jmenovaní se stali důležitou součástí předmětu studia středověké a barokní racionalistické teologie.⁵

V křesťanské Evropě však vysoko nad všemi bytostmi kraloval Bůh. Na něho myslel a téměř na každém kroku spoléhal člověk. I on se stal nejen předmětem středověké a barokní racionalistické teologie, ale nepostradatelný byl i vědě. Následující tři příklady jsou toho dokladem.

1. ... Existuje nekonečný vesmír, který je výsledkem nekonečné božské moci, neboť považuji za věc nehodnou boží dobroty a moci, aby božstvo dalo vznik jen konečnému světu,⁶ když vedle tohoto světa mohlo dát vznik jinému a nekonečně mnoha jiným. . .

Protokol z třetího výslechu Giordana Bruna 2. června 1592.

2. ... Tento překrásný systém Slunce, planet a komet mohl vzniknout pouze z úradku a moci nějaké moudré a mocné Bytosti... Tato bytost vládne všem věcem nikoliv jako duše světa, ale jako Pán veškerenstva; a právě pro tuto vládu si přeje být zván Pán Bůh (Pantokrator)...

Isaac Newton, *Scholium generale Philosophiae naturalis principia mathematica* (1713).⁷

Descartes pomocí vírů snadno odvodil, že dráhy všech planet leží v téže rovině. **Newton** víry neuznával, a tak mu nezbylo než se odvolat na Boha.

3. Následující text je velmi zkráceným a upraveným úryvkem z **Leibnizovy** korespondence s Pacidiem. Protože Leibniz v předcházejících úvahách spojitě změny vyloučil, nebyl schopen bez Boží pomoci změny vůbec vysvětlit.

Změna nějakého tělesa v případě, kdy čas je diskrétní, se může odehrávat pouze tak, že v daném atomu času Bůh toto těleso zničí

⁵Viz sv. Tomáš Akvinský, *Theologická summa*, díl I., otázky L až LXIV.

⁶Světlem se zde rozumí sluneční soustava; konečným světem konečně velká a konečně rozlehlá sluneční soustava.

⁷Viz Isaac Newton, *The Principia*, druhé (1713) a třetí (1726) vydání. V anglickém překladu A. Motteho. Isaac Newton (1995), *The Principia*, transl. A. Motte. New York, Prometheus Books, s. 440.